

14
С.И. Вайнштейн

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В КОСМОСЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
С И Б И Р С К О Е О Т Д Е Л Е Н И Е
С и б и р с к и й и н с т и т у т з е м н о г о м а г н е т и з м а ,
и о н о с ф е р ы и р а с п р о с т р а н е н и я р а д и о в о л н

С. И. Вайнштейн

МАГНИТНЫЕ
ПОЛЯ
В КОСМОСЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1983

В а й н ш т е й н С. И. Магнитные поля в космосе.— М.: Наука, 1983.

Монография посвящена исследованию космических магнитных полей, их природе и динамике. Изложен лагранжев подход в теории динамо, приводящий к классу точных задач турбулентного динамо и возможности решения проблемы мелкомасштабного динамо. В книге изложен единый подход в теории турбулентности высокопроводящей плазмы и тем самым сформулирована «макроскопическая» магнитная гидродинамика. Обсуждаются приложения теории для объяснения солнечных магнитных полей, неоднородностей солнечного ветра, полей межзвездного газа Галактики.

Ил. 14. Библиогр. 109 назв.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
В. Е. СТЕПАНОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Бурное развитие наших представлений о магнитных полях в космосе вызвало появление ряда обзоров и монографий, посвященных этому предмету. С одной стороны, прогресс в понимании физики магнитных полей связан с достижениями наблюдательной астрономии и ракетных данных, с другой — с теоретическими исследованиями в данной области.

Особая роль магнитных полей заключается в том, что в них содержится основная энергия электромагнитного поля. Поэтому практически все нестационарные явления связаны с динамикой магнитных полей. Так, объяснение солнечного цикла и вообще всей солнечной активности немыслимо без привлечения магнитных полей. Физика солнечного ветра и солнечно-земных связей тесно связана с нестационарными явлениями в магнитных полях. Магнитные поля наблюдаются в звездах, межзвездном газе Галактики.

Есть основания считать, что магнитные поля столь же присущи космическому веществу, как само движение. Действительно, кинетической энергии движущейся космической плазмы вполне достаточно для того, чтобы генерировать магнитные поля. Теория динамо как раз и призвана объяснить происхождение и динамику переменных магнитных полей, возникающих за счет движений плазмы.

Круг вопросов, связанных с магнитными полями, соответствует практически всей астрофизике и геофизике. Поэтому мы, естественно, не можем претендовать на отражение всех аспектов в одной книге. Монография посвящена глобальным явлениям, связанным с магнитными полями: их происхождению, динамике полей, влиянию полей на движущуюся плазму.

Распространенным типом движения космической плазмы является турбулентное, хаотическое. Поэтому основное внимание будет уделено турбулентности жидкости в магнитном поле, более конкретно — турбулентности высокопроводящей плазмы, когда имеет место вмороженность магнитного поля в вещество. Первая глава посвящена введению в теорию динамо. Задачи этой главы следующие. Прежде всего, дать представление о специфике космической плазмы и о магнитной гидродинамике как разделе физики плазмы. Главная цель первой главы — сформулировать проблему динамо, показать трудности, «подводные камни» и результаты, лежащие на поверхности, а также результаты разработок простейших моделей динамо. Кратко можно изложить содержание книги так: построение магнитной гидродинамики турбулентной среды

высокой проводимости (т. е. движущейся плазмы при больших магнитных числах Рейнольдса).

Со времени написания предыдущей монографии [1] в теории турбулентности высокопроводящей среды произошли большие как количественные, так и качественные изменения, суть которых изложена кратко во Введении. Цель написания настоящей монографии как раз и состоит в отражении новых тенденций в этом предмете. Это не значит, что для понимания данной книги необходимо прочесть предыдущую. Книга построена независимым образом, в главе I изложены основы теории. Однако нельзя утверждать, что в данной монографии отражены все вопросы, связанные с динамо. С теорией геодинамо читатель может познакомиться по обзору Брагинского [2], с теорией динамо слабопроводящей среды — по [3] и [4]. Обзор по магнитным полям планет написан Буссе [5].

Книга рассчитана на три категории читателей: читатель-астрофизик, читатель, интересующийся физикой дела, и, наконец, читатель — «сугубый» теоретик, желающий разобраться во всех обоснованиях. Изложение построено так, чтобы удовлетворить всех читателей. Астрофизику автор может посоветовать читать последние подразделы всех (кроме первой) глав, а также исходя из названий подразделов. В последних подразделах сформулированы основные результаты и приложения. Читателям, интересующимся физическим смыслом результатов (к которым автор причисляет и себя), можно рекомендовать читать сначала последние и первые подразделы глав. Они построены таким образом, чтобы их можно было понять, не читая основного текста. В них излагаются основные физические соображения и физический смысл результатов. Желая углубить свое понимание или посчитав последние и первые подразделы недостаточно строгими, читатель-физик может обратиться к другим подразделам, судя по их названиям. Читателю математического склада может не понравиться определенная непоследовательность изложения в главах II и III. Действительно, можно было бы обосновать сначала самый общий вид уравнения для четырехточечной функции распределения, а затем, в качестве частных случаев, получить из него все результаты этих двух глав. Из этого уравнения следует динамика супермелкомасштабных и просто мелкомасштабных полей. Если проинтегрировать его по двум точкам, получится уравнение для двухточечной функции распределения, а из него следуют все результаты второй главы по крупномасштабным полям. Мы же сначала обосновываем уравнение для двухточечной функции распределения, затем обобщаем его на четырехточечную. Это сделано по двум причинам. Во-первых, изложение от общего к частному, от которого мы отказались, привело бы к необходимости добрую треть книги посвятить теоремам и строгим выводам. А это показалось бы утомительным для основного контингента читателей, на которых мы рассчитываем. Во-вторых, принятое изложение делает независимой вторую главу, посвященную только крупномасштабным полям. Это

удобно для тех, кто захочет углубить понимание физики процессов, связанных с крупномасштабными полями.

Читатель, не знающий лагранжев подход и решившийся тем не менее ознакомиться с такими подразделами, как, например. «Лагранжевы статистические характеристики двух жидких частиц», будет вознагражден за свой упорный (подчеркиваем) труд овладением мощного средства познания — лагранжевым подходом. Не случайно же этот подход дает возможность решить проблему, тесно связанную с проблемой турбулентности, без использования малых параметров или предположений типа гипотез замыкания. Нет сомнения в том, что владение лагранжевым подходом даст возможность разобраться в труднейших вопросах турбулентности и гидродинамики. Вместе с тем автор весьма сожалеет, что, несмотря на огромные усилия излагать материал с использованием в основном лишь физических соображений, обоснование все же потребовало введения громоздких математических выражений. Но в будущем, без сомнения, вся проблема турбулентного динамо будет излагаться более простым языком. В настоящее время приходится довольствоваться тем, что есть.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность руководству СибИЗМИР СО АН СССР за предоставленные прекрасные возможности для работы над монографией, а также Л. Л. Кичатинову за помощь при работе над четвертой главой. На уровень написания монографии решающим образом повлияли переписка и личное общение с иностранными коллегами, а также материалы, присланные ими специально для монографии. Автору хотелось бы в первую очередь выразить благодарность Е. Н. Паркеру, приславшему свои работы и комментарии к ним по новому механизму, который и является одним из четырех главнейших достижений теории. Не менее полезными для работы над монографией оказались материалы, присланные Крейкнаном, Стиксом, Моффатом, Дарни, Робертсом, Винчем, Рюдигером, Хайдом, Буссе, Краузе, Рэдлером.

ВВЕДЕНИЕ

Явление магнетизма заинтересовало исследователей еще в глубокой древности, начиная с Пифагора (VI в. до н. э.). Компас был известен гораздо раньше: в Китае примерно три тысячи лет назад. Первое научное исследование о магните принадлежит английскому ученому Вильяму Гильберту — современнику Шекспира. Магнит казался загадочным, ему приписывали лечебные свойства. В XVIII в. Антон Месмер создал целые школы по магнетизму. Он лечил своих пациентов с помощью магнитов.

Месмер считал, что Вселенная пронизана магнитным флюидом и люди с помощью него взаимодействуют друг с другом, с животными и неживой природой. Наука опровергла существование магнитного флюида, но если бы Месмер знал, что вся Вселенная пронизана магнитными полями! Последние настолько широко распространены в природе, что это кажется даже несколько странным.

Несомненно, что если бы в настоящее время был обнаружен в астрофизике объект, совершенно лишенный магнитных полей, то это вызвало бы сенсацию.

Магнитные поля, однако, совсем не пассивны, т. е. они не только генерируются движениями плазмы, они активно влияют на движение. Эта область относится к нелинейным задачам магнитной гидродинамики.

После написания предыдущей монографии [1] произошло бурное развитие теории динамо. Наши представления существенно изменились. Некоторые изменения носят количественный характер, и благодаря им мы существенно продвинулись в понимании ряда явлений. В других представлениях произошел качественный скачок.

Сформулируем важнейшие достижения, и дальнейшая цель всей книги и будет состоять в их изложении и обосновании:

- 1) развитие простейших моделей динамо;
- 2) новый механизм динамо-эжектора магнитных трубок Паркера;
- 3) получение точных решений в теории турбулентного динамо, а также решение проблемы мелкомасштабного динамо;
- 4) разработка последовательной и единой нелинейной теории турбулентного динамо или макроскопической магнитной гидродинамики (турбулентность при больших магнитных числах Рейнольдса).

Обсудим теперь все четыре пункта последовательно. Прежде всего, развитие простейших моделей. Лет двадцать назад многим авторам казалось, что теория динамо ограничивается лишь теоремой Каулинга, запрещающей симметричное динамо. После того как появились многочисленные примеры, показывающие возможность генерации поля, укоренившееся мнение было поколеблено в слабой степени. Казалось, что динамо — существенно трехмерное, несимметричное явление. Между тем давно известное динамо винтовым движением осуществляется двумерным полем скорости (см. гл. I, подразд. 6). В последние годы стало ясно, что знаменитые антидинамо-теоремы совершенно напрасно пугали исследователей. Не так-то просто, как оказалось, удовлетворить всем требованиям антидинамо-теорем в природе! В гл. I будет показано, что генерация поля может осуществляться дифференциально вращающимся цилиндром (осевая симметрия и симметрия относительно плоскости). А в гл. III увидим, что в стохастической модели генерация осуществляется простейшим одномерным движением типа сдвига. Найти движение, способное генерировать наблюдаемое поле, не проблема. Вопрос в том, чтобы это движение согласовалось с динамическими уравнениями, с наблюдениями и с обратным действием магнитного поля на движение.

Приступим теперь к обсуждению второго пункта — нового механизма Паркера. Изложение его потребовало ввести понятие о полях промежуточных масштабов, что само по себе служит для развития теории динамо. До сих пор основой прикладных моделей солнечного цикла, генерации полей в звездах, Галактики являлась старая модель Паркера [6]. На наш взгляд, новая модель не только развивает теорию, но и будет иметь много приложений в астрофизике.

Обратимся к третьему пункту достижений. Их можно разделить на две подгруппы: точные задачи для динамо крупномасштабного поля и мелкомасштабное динамо. Обсудим сначала крупномасштабные поля. Нельзя сказать, что в этом вопросе произошло качественное изменение наших представлений, скорее количественное. Все эффекты для генерации крупномасштабных полей известны уже довольно давно. Но все же строгое и последовательное построение теории крупномасштабных полей стало возможным после формулировки и решения точных задач с помощью лагранжевого подхода. Основоположником этого направления исследований был Крейкнан [7]. Строгий подход снимает целый ряд парадоксов и трудностей, возникающих при описании турбулентной высокопроводящей среды. Во второй главе установлена тесная связь между статистическими характеристиками магнитного поля и скалярной примесью. Пусть читателя поэтому не удивляет, что так много внимания уделено динамике скалярной примеси. Нам хотелось бы подчеркнуть нетривиальность точного подхода. Дело в том, что в эйлеровом описании мы сталкиваемся с обычной проблемой за-

мыкания, характерной для теории турбулентности. В задаче отсутствует малый параметр, и точное решение ее в эйлеровой постановке невозможно! В лагранжевом подходе оказывается возможным обойти эту трудность: получить усредненные уравнения в задаче без малого параметра и не пользуясь гипотезами замыкания. Последние параграфы второй главы посвящены крупномасштабным магнитным полям в космосе.

Что касается мелкомасштабного динамо, то здесь проблема ни в коей мере не могла быть решена с использованием приближенных и эвристических теорий. Мы говорили в [1] о мелкомасштабном динамо в сослагательном наклонении. После построения точной теории лагранжевого подхода стало возможным решить эту проблему. Необходимость хоть как-нибудь выяснить этот вопрос возникла давно. С этого началась теория динамо, и эту проблему и называли проблемой турбулентного динамо. Актуальность вопроса о том, есть или нет турбулентное динамо, для астрофизики очевидна. Это в первую очередь связано с тем, что большие масштабы далеко не всегда выделяются в системе. Так, поперечная толщина Галактики и размер межзвездных облаков — величины одного порядка. Крупные масштабы весьма нечетко выделяются и в солнечной конвективной зоне. Вообще выделение крупных масштабов (так называемое двухмасштабное динамо) — это идеализация, хорошего примера для которой в природе, пожалуй, нет. С другой стороны, энергия мелкомасштабных полей практически всегда превышает энергию крупномасштабных (если последние хоть как-то выделить). Ясно, что мелкомасштабные поля генерируются независимо от крупномасштабных. И еще одно немаловажное обстоятельство: скорость роста мелкомасштабных полей (если они действительно усиливаются) наибольшая из возможных (крупномасштабные поля усиливаются гораздо медленнее). Положительное решение этого вопроса (см. гл. III) означает, что фактически магнитные поля в космосе генерируются в первую очередь именно механизмом мелкомасштабного динамо.

Несколько замечаний исторического характера. Единственной работой в этом направлении была статья Крейкнана и Нагараяна [8], где все трудности проблемы поняты и проанализированы авторами с полным пониманием вопроса. Выводы авторов пессимистические: на современном этапе, т. е. в 1967 г., решить проблему было невозможно. Интересно (и в то же время грустно) отметить, что в последующие годы наметился вполне четкий регресс в этой области. Была написана масса работ и рассуждений как в астрофизическом аспекте (в основном по отношению к магнитному полю Галактики), так и безотносительно к приложениям, в которых не учитывались те или иные трудности, указанные в [8]. Уровень понимания проблемы постепенно снижался. Появилось даже курьезное утверждение, что проблему не нужно решать, ибо турбулентная среда гиротропна и в ней возбуждаются крупномасштабные поля. Это утверждение ухитрилось проникнуть даже в нашу

предыдущую монографию [1]. Такая плачевная ситуация, по-видимому, была связана с полной бесперспективностью (в то время) решения этой проблемы регулярным методом. Все стало иначе после появления упомянутой работы [7], где разработан строгий подход (правда, для крупномасштабных полей). В гл. III излагается точная теория мелкомасштабных полей.

Мельком пролистав страницы гл. III и увидев там массу многоиндексных выражений, тензоров, любой читатель может заподозрить, что в этой главе мало физики и содержанием ее является обоснование. Он будет прав и не прав. С одной стороны, только строгий, обоснованный подход, как сказано выше, способен дать ключ к решению проблемы. Для этого приходится вдаваться в подробности и тонкости, касающиеся скалярной примеси. Изучение скалярной примеси помогает понять свойства магнитных полей, что само по себе является главным моментом всей монографии. В частности, это указывает на важность экспериментального, более подробного исследования корреляционных характеристик скалярной примеси (чем это делалось до сих пор). Если нас интересуют крупномасштабные магнитные поля, то они однозначно могут быть выведены из поведения двухточечной корреляции скалярной примеси, ее динамики во времени. Если нас интересуют мелкомасштабные магнитные поля (т. е. корреляционные характеристики), то для этого нужно изучать динамику четырехточечной корреляции скалярной примеси. Однако важнейший результат — ответ на вопрос, есть ли турбулентное динамо — получается без привлечения экспериментальных данных. В конце главы мы все же изложили довольно пространное физическое рассуждение, лежащее в основе генерационных свойств турбулентности. Все они кажутся нам убедительными и вескими, но... только после того, как было проведено строгое обоснование. Тем не менее мы их изложили. После обоснования можно считать, что эти соображения углубляют наше понимание физики процесса. В конце этой главы мы детально обсудили все то, что может дать теория турбулентного динамо для развития теории динамо вообще и ее астрофизические следствия.

Наконец, нелинейная теория. Здесь изменение наших представлений носит скорее количественный, чем качественный характер. Сейчас мы можем, например, определенно говорить об энергии магнитных пульсаций и считать, что она сравнима с энергией пульсационной скорости. В монографии [1] мы это предполагали и пользовались уже этим фактом как известным. Много нелинейных эффектов было уже известно, и этому посвящена глава в [1]. Тем не менее все это являлось только фрагментами теории. Совершенно неясно было, какие нелинейные эффекты являются главными, что нужно учитывать в первую очередь. Результаты получались при большом числе предположений. В настоящее время разработан единый и последовательный подход, изложенный в гл. IV. Теперь можно «тверже держаться на ногах», в этой об-

ласть. В общем мы считаем, что макроскопическая магнитная гидродинамика в основных чертах уже разработана.

Резюмируя все о новейших достижениях, можно сказать следующее. При написании монографии [1] перед теорией стоял ряд серьезных проблем, которые тогда не были решены. Исследователи, занимающиеся расчетами конкретных моделей, скажем численного счета солнечного цикла, а также интерпретацией наблюдений, могли резонно заявить, что те или иные аспекты теории они могут не принимать во внимание, ибо основные проблемы теории не решены. Теперь, на наш взгляд, ситуация иная. Важнейшие вопросы решены (это, конечно, не значит, что здесь уже нет интересных задач и нечего делать теоретику. Читатель убедится в этом, прочтя книгу). В частности, в конце гл. IV сформулированы задачи для солнечной конвективной зоны. Если раньше нам были неизвестны даже основные уравнения, то сейчас уравнения известны. И новые трудности связаны с решением системы нелинейных уравнений для данных конкретных условий.

1. Специфика космических полей покоящейся среды

Космическое вещество представляет собой ионизованную среду, т. е. плазму, пронизанную электромагнитными полями. В первую очередь эти поля есть электромагнитное излучение, которое и является основным поставщиком информации о космической плазме. Плотность энергии этих полей, однако, оказывается зачастую гораздо ниже плотности энергии вещества. Выясняется, что второе место после вещества по энергетике занимают квазистационарные электромагнитные поля.

Описание этих полей можно осуществлять с помощью уравнений электродинамики сплошных сред:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{H} , \mathbf{E} — напряженности магнитного и электрического полей. Для замыкания выписанной системы необходимо ввести связь между плотностью тока \mathbf{j} и полями, которая в простейшем виде записывается как закон Ома в движущейся среде:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right). \quad (1.5)$$

Утверждение о квазистационарности полей означает, что током смещения $1/c \partial \mathbf{E} / \partial t$ в (1.1) можно пренебречь. Ток смещения играет определяющую роль в процессах электромагнитного излучения, которые мы не рассматриваем. Конкретно критерий малости тока смещения будет выписан далее.

Подставим теперь (1.5) в (1.1) и возьмем операцию rot от (1.1), тогда получим с использованием (1.4)

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \operatorname{rot} D \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad D = c^2 / 4 \pi \sigma. \quad (1.6)$$

Если σ не зависит от координат, то (1.6) можно записать с учетом (1.2) в виде

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + D \Delta \mathbf{H}. \quad (1.7)$$

Если движение вещества известно, т. е. поле скоростей $v(x, t)$ задано, то (1.6) будет определять магнитное поле, если дополнительно известны начальные и граничные условия для поля \mathbf{H} .

Итак, задача свелась к нахождению одного поля \mathbf{H} , электрическое поле определяется из (1.3), (1.4). Здесь не случайно магнитное поле поставлено в привилегированное положение. Мы увидим далее, что напряженность электрического поля значительно меньше, чем \mathbf{H} . Рассмотрим прежде всего покоящуюся среду, т. е. $v = 0$. Тогда при $D = \text{const}$ имеем

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = D \Delta \mathbf{H}. \quad (1.8)$$

При наличии внешних источников поля имеется стационарное решение

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1.9)$$

описываемое гармоническими полями. Примером таких полей является магнитное поле Земли на небольших расстояниях от поверхности (на расстояниях, превышающих десятки радиусов Земли, поле сильно возмущается солнечным ветром), магнитные поля планет.

Нас будет интересовать в основном другая постановка: нестационарность поля. Отсутствие внешних источников означает в неограниченной среде, что

$$\mathbf{H} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad H = O(x^{-3}), \quad (1.10)$$

а в ограниченной среде (небесное тело: звезда, Галактика и т. п.) \mathbf{H} непрерывным образом переходит в вакуумное поле (1.9), исчезающее на бесконечности.

При выполнении условий (1.10) произвольное начальное поле будет затухать, диссипируя в тепло из-за омических потерь. Это есть свойство уравнения (1.8) — фактически уравнения диффузии. Время жизни поля

$$t_0 = L^2/D = 4\pi\sigma L^2/c^2. \quad (1.11)$$

Здесь L — характерный масштаб поля. Уже в этой оценке проявляется специфика космической электродинамики. Дело в том, что величина L весьма велика, что означает очень большое время диссипации поля. Это есть первое свойство космической плазмы. Типичное значение D для космической плазмы $10^7 \text{ см}^2/\text{с}$.

Возьмем для примера «скромное» (с точки зрения астрофизики) по размеру поле солнечного пятна с $L = 3 \cdot 10^9 \text{ см}$, $D = 10^8 \text{ см}^2/\text{с}$. Время диссипации поля t_0 получится равным 3000 лет! Для металлического проводника в земных условиях размером $L = 10^2 \text{ см}$ и $D = 10^7 \text{ см}^2/\text{с}$ (плохой проводник) имеем $t_0 = 10^{-3} \text{ с}$.

Обоснование пренебрежимой малости тока смещения здесь можно записать в виде

$$\sigma \gg \omega, \quad (1.12)$$

где $\omega = 1/t_0$ — характерная частота процесса. Условие (1.12) вы-

полняется с огромным запасом не только для космической плазмы, но и для земных условий небольших проводников.

Огромное время диссипации поля соответствует высокой индуктивности космической плазмы (а не высокой проводимости, как иногда полагают: дело в том, что принятое значение $D = 10^7$ см²/с соответствует плохому проводнику; проводимость меди, например, выше на несколько порядков). Отсюда начинаются главные проблемы космической электродинамики: как генерировать поле в среде с такой высокой индуктивностью, как проходят процессы с быстрой диссипацией и т. п.

Сравним напряженности электрического и магнитного полей. Согласно (1.4) имеем оценку

$$E = \omega LH/c = cH/4\pi\sigma L.$$

Даже для не слишком больших L

$$E \ll H. \quad (1.13)$$

Неравенство (1.13) означает, в частности, что плотность энергии магнитного поля гораздо больше электрического:

$$\frac{E^2}{8\pi} \ll \frac{H^2}{8\pi}.$$

Именно поэтому поле \mathbf{H} ставится в привилегированное положение.

2. Поля в движущейся среде. Дифференциальное вращение

Рассмотрим плазму, находящуюся в движении, $v \neq 0$. Отношение первого члена правой части (1.7) ко второму есть по порядку величины

$$(v/L)/(D/L^2) = vL/D = R_m$$

— магнитное число Рейнольдса. Второе основное свойство космической плазмы состоит в том, что, как правило, $R_m \gg 1$. Заметим, что в технике и в экспериментальных установках R_m много меньше единицы. Иногда только достигаются значения $R_m = 10, 15$, и то с трудом.

Ввиду того что $R_m \gg 1$, можно в некоторых задачах пренебречь вторым членом правой части (1.6) и (1.7), тогда получим выражение

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad (1.14)$$

которое описывает вмороженность магнитного поля в среду. Вмороженность означает, что силовые линии поля следуют за движущейся плазмой. Это уравнение дает гораздо более быстрое изменение магнитного поля, чем согласно (1.8), которое дает время жизни t_0 по (1.11). Действительно, элементарная оценка

показывает, что время изменения поля

$$t_1 = L/v \quad (1.15)$$

в R_m раз меньше, чем t_0 .

Простейшим примером является поступательное движение, просто переносящее поле с веществом. Другой пример — вращение звезды. В частности, переменность наблюдаемого поля звезды может объясняться просто вращением, когда наблюдатель видит разные полушария звезды с разными полями. Впрочем, следует уже здесь оговориться, что такое объяснение редко бывает удовлетворительным.

Несколько более сложный пример — вытягивание поля сдвиговым движением. Рассмотрим динамику поля для случая $v = \{0, v_y(x), 0\}$ и начальное поле — однородное: $\mathbf{H} = \{H_0, 0, 0\}$. Тогда согласно (1.14)

$$\begin{aligned} \partial H_x / \partial t &= -v_y \partial_y H_x = 0, \quad H_x \equiv 0, \\ \partial H_y / \partial t &= -v_y \partial_y H_x + H_0 \partial_x v_y \equiv H_0 \partial_x v_y, \\ \partial H_z / \partial t &= -v_y \partial_y H_z = 0, \quad H_z \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Картина силовых линий для течения $v_y = 0$ при $|x| \geq l$ и $|x| \leq l$, $v_y \neq 0$ изображена на рис. 1.1. В начальный момент силовые линии прямые (штриховые). Затем движение «вытягивает» силовые линии вдоль v , растет H_y -компонента (что видно из второго уравнения системы (1.16)). Таким образом, поле генерируется движущейся плазмой. На рис. 1.1 изображен, собственно говоря, принцип магнитогидродинамического преобразователя энергии (МГД-генератор): механическая энергия переходит в магнитную.

Учтем теперь диссипацию, т. е. второй член в (1.7). Тогда в правую часть каждого из уравнений (1.16) следует добавить $D\Delta H_x$, $D\Delta H_y$, $D\Delta H_z$. При этом, естественно, соотношения $H_x \equiv 0$, $H_z \equiv 0$ остаются, а уравнение для H_y уже не дает неограниченного усиления поля и при $t > t_0$ H_y выходит на стационарный асимптотический режим, определяемый равенством

$$D\Delta H_y = -H_0 \partial_x v_y, \quad H_y \approx R_m H_0. \quad (1.17)$$

Итак, установившееся значение поля во много раз превышает (для космических условий) начальное H_0 . Здесь следует еще раз подчеркнуть, что движение задано. В реальной ситуации следует учитывать электромагнитные силы, ограничивающие течение и тем самым установившуюся величину H_y . Эта задача одномерная, а поэтому уже давно решалась в магнитной гидродинамике и, естественно, с учетом электромагнитной силы (решение Гартмана, см., например, [9]).

Приведенный пример не характерен для астрофизических условий, так как трудно найти условие течения в каналах для плазмы без стенок, как это имеет место в астрофизике. Но в то же время это течение отражает все черты так называемого дифференциального вращения. Состояние дифференциального вращения уже, можно сказать, типично для звездного вещества. Так, дифферен-

пшальное вращение Солнца непосредственно наблюдается (зависимость угловой скорости вращения Ω от широты), зависимость Ω от расстояния до центра Солнца предсказывается теоретически. Дифференциальное вращение глубинных слоев звезд должно иметь место при наличии конвекции [10]. Последнее явление — конвекция — тоже распространенное. Упомянем, наконец, дифференциальное вращение межзвездного газа Галактики.

Выпишем уравнения для осесимметричного поля в дифференциально вращающемся шаре:

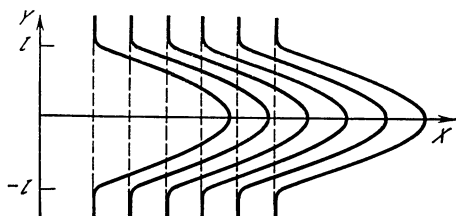
$$\frac{\partial}{\partial t} A_{\varphi} = D \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) A_{\varphi}, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_{\varphi} = & r \sin \theta H_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + H_{\theta} \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \\ & + D \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) H_{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$H_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_{\varphi}, \quad H_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} A_{\varphi}, \quad r \Omega(r, \theta) \sin \theta = v_{\varphi}.$$

При $\Omega = \text{const}$, т. е. при отсутствии дифференциального вращения, генерационный член в (1.19) отсутствует, остается одна диссипация поля. Как мы видели в подразд. 1, диссипация происходит

Рис. 1.1.
Деформация силовых линий
сдвиговым движением



чрезвычайно медленно. Если вообще пренебречь диссипацией, т. е. считать поле A_{φ} (а значит, H_r, H_{θ}), так называемое полоидальное поле, стационарным, и $\Omega \neq \text{const}$, то H_{φ} (тороидальное поле) растет. Процесс вполне аналогичен росту H_y -составляющей в (1.16).

Аналогично (1.17) можно записать, что установившееся квазистационарное значение тороидального поля есть

$$H_{\varphi} \approx R_m A_{\varphi} / L. \quad (1.20)$$

Полоидальное поле может поддерживаться внешними источниками (как однородное поле H_0 в МГД-генераторе (1.16) должно создаваться внешними магнитами). Тогда усиление тороидального поля (1.20) будет весьма значительным. Так, магнитосфера Земли не полностью вовлечена во вращение Земли хотя бы потому, что отдельные части магнитосферы взаимодействуют с солнечным ветром, который, естественно, во вращении Земли не участвует. Поэтому магнитные поля вытягиваются дифференциально вращающейся магнитосферой, причем «внешнее» поле здесь — поле, создаваемое токами в земном ядре. Это явление называется магнито-

сферным динамо (или атмосферным динамо). То, что мы будем называть просто динамо, отличается от магнитосферного динамо, о чем будет указано в подразд. 4.

Мы уже можем заметить, что усиление поля дифференциальным вращением временное, т. е. после достижения значения (1.20) за время t_0 (1.11) поле начнет диссипировать и за такое же примерно время исчезнет. Тем не менее этот процесс может играть существенную роль в астрофизике. Здесь тоже возможна ситуация, когда полоидальное поле поддерживается внешними источниками. Так, полоидальное поле может генерироваться ЭДС типа термотока [11]. Тогда вместо (1.7) имеем

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}] + D \Delta \mathbf{H} - c \text{rot} \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — электрическое поле термо-ЭДС. Поскольку во вращающейся звезде $\mathbf{E} = \{0, 0, E_\phi\}$, то поддерживается именно полоидальное поле. Несмотря на малую величину установившегося поля A_ϕ , усиление, или, по терминологии [12], накачка (1.20), дает уже значительное поле H_ϕ . Таким образом, дифференциальное вращение может вызвать большую накачку поля.

Для оценки тока смещения сравним его в (1.1) с $\text{rot} \mathbf{H}$. Прежде всего, согласно (1.4)

$$E = HL/ct_1 = vH/c. \quad (1.21)$$

Таким образом, условие (1.13) опять выполняется. Далее подставим эту оценку в (1.1) и получим, что ток смещения в c^2/v^2 раз меньше $\text{rot} \mathbf{H}$.

Движущаяся среда вызывает потенциальные электрические поля. Беря дивергенцию от (1.1) и учитывая (1.5), получим

$$\partial \rho / \partial t + 4\pi \rho + \mathbf{E} \nabla \sigma + \frac{\zeta}{c} \text{div} [\mathbf{v} \mathbf{H}] = 0. \quad (1.22)$$

Для $\sigma = \text{const}$ из (1.22) следует, что плотность заряда устанавливается за чрезвычайно короткое время $(4\pi\sigma)^{-1}$ (по порядку величины равное 10^{-14} с). Установившийся заряд и соответствующая потенциальная составляющая электрического поля определяются уравнением

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho = \frac{1}{c} \text{div} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad (1.23)$$

отсюда мы вновь (теперь уже для потенциальной составляющей \mathbf{E}) возвращаемся к оценке (1.21).

3. Магнитная гидродинамика (МГД)

В двух предыдущих подразделах движение считали заданным. В действительности же космическая плазма представляет собой сплошную среду со многими степенями свободы. Поле скоростей

в несжимаемой среде подчиняется уравнению

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] + \chi \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.24)$$

Здесь \mathbf{F} — какие-либо внешние силы, χ — вязкость. Второй член правой части (1.24) является силой электромагнитной природы. Система (1.6), (1.24) однозначно определяет поля \mathbf{v} и \mathbf{H} по начальным значениям этих величин и по граничным условиям. Давление p в (1.24) определяется из условия $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Эта система является основой магнитной гидродинамики.

Что же означало в предыдущем подразделе заданное движение? С точки зрения электродинамики это то, что \mathbf{v} не зависит от магнитного поля. Тогда (1.6) есть линейное уравнение относительно \mathbf{H} , и все предыдущие рассуждения имеют силу. Из (1.24) видно, что это приближение является оправданным, если электромагнитная сила в (1.24) мала, т. е.

$$\rho v^2 / 2 \gg H^2 / 8\pi \quad \text{или} \quad p \gg H^2 / 8\pi. \quad (1.25)$$

Допущение о несжимаемости оправдано, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, если скорость v мала по сравнению со скоростью звука, число Маха v/s мало. Поэтому (1.25) заведомо выполняется при

$$\rho v^2 / 2 \gg H^2 / 8\pi. \quad (1.26)$$

Дело в том, что $p \approx \rho s^2$. Если же нелинейный член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ мал (как в течении Гартмана (см. рис. 1.1), где он просто обращается в нуль), то поле не препятствует течению даже при нарушении (1.26). Поле усиливается до значения, определяющегося из равенства $H^2 / 8\pi = p$ (см. [1, гл. 2, § 2.11]).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В оценки (1.25), (1.26) не входит коэффициент χ . Кроме того, при описании динамики поля можно пользоваться (1.14), т. е. положить $D = 0$. Малость вязкости χ и, как иногда говорят, магнитной вязкости D означает

$$R_m \gg 1, \quad R = vL/\chi \gg 1. \quad (1.27)$$

Эти неравенства можно переписать, выражая все через частоту столкновений:

$$D = c^2 / 4\pi\sigma, \quad \sigma = ne^2 / mv, \quad \chi = v_i^2 / \nu_i,$$

где n — плотность плазмы, m — масса электрона, v — частота электрон-ионных столкновений, v_i — тепловая скорость ионов, ν_i — частота ион-ионных столкновений. Легко видеть, что неравенства (1.27) будут удовлетворяться при

$$v \rightarrow 0, \quad \nu_i \rightarrow 0, \quad (1.28)$$

т. е. если частота столкновений мала.

Что же означает «частота мала»? По сравнению с чем? Формально мы можем положить частоты столкновений строго равными

нулю и получить систему двух уравнений (1.14) и (1.24) с $\chi = 0$. Эта система имеет определенный смысл, более того, она имеет название: система уравнений идеальной МГД. В классической электродинамике сплошных сред утверждение о малости v , v_i просто эквивалентно условиям (1.27). Но, строго говоря, частота столкновений не может равняться нулю. Дело в том, что при $v = 0$ как закон Ома (1.5), так и уравнение гидродинамики (1.24) не могут быть выведены из точных кинетических уравнений. Для того чтобы получить закон Ома, необходимо, чтобы

$$\omega \ll v, v_i \quad (1.29)$$

(ω — частота процесса), а для вывода (1.24) должно выполняться

$$\Lambda = v_i/v_i \ll L. \quad (1.30)$$

Здесь L — масштаб неоднородности всех полей, Λ — длина свободного пробега иона, v , v_i малы в (1.6), (1.24), но не равны нулю!

Однако эти условия далеко не всегда выполняются в астрофизике. В сравнительно плотной плазме (глубинные слои звезд, солнечная фотосфера, хромосфера) этим условиям можно удовлетворить. В этом случае говорят, что плазма столкновительна. Но уже в короне Солнца, солнечном ветре, магнитосфере Земли, межзвездной среде частота столкновений весьма мала. В частности, в межзвездной среде частица может пройти без столкновений расстояние от Солнца до Земли. Такую плазму называют бесстолкновительной. Оказывается, что и бесстолкновительная плазма может описываться уравнениями МГД (1.14) и

$$\rho \frac{d^i}{dt} \mathbf{v} = - \operatorname{div} \hat{p} + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}),$$

$$p_{ij} = p_{\parallel} \tau_i \tau_j + p_{\perp} (\delta_{ij} - \tau_i \tau_j), \quad \tau_i = H_i/H, \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho H} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} H^2}{\rho^3} \right) = 0$$

(см. [13]). Уравнения (1.31) описывают движение сплошной среды с анизотропным тензором давления \hat{p} (p_{\parallel} — продольное давление, т. е. вдоль магнитного поля, p_{\perp} — поперечное). Здесь предположение о несжимаемости уже не используется. Два последних уравнения (1.31) — аналогия уравнений состояния.

Область применимости бесстолкновительной МГД:

$$\omega \ll \omega_i, \omega_e, \omega_i = eH/mc, \omega_e = eH/Mc,$$

$$\rho_i, \rho_e \ll L, \rho_i = v_i/\omega_i, \rho_e = v_e/\omega_e, \quad (1.32)$$

M — масса иона, ω_i , ω_e — ионная и электронная циклотронные частоты, ρ_i , ρ_e — радиусы Лармора, v_e — тепловая скорость электронов. Уравнения (1.14) и (1.31) выводят из дрейфового приближения: частицы осциллируют вокруг силовой линии поля с циклотронной частотой и медленно движутся поперек магнитного поля и силы, действующей на них. В частности, (1.14) получится,

если устремить σ (1.6) к бесконечности (т. е. $v \rightarrow 0$), считая j конечным. Тогда получим

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0. \quad (1.33)$$

Взяв rot от (1.33) и воспользовавшись (1.4), получим (1.14). Но выражение для \mathbf{v} , получаемое из (1.33), соответствует электрическому дрейфу в электрическом поле \mathbf{E} . Более слабые (чем электрический) дрейфы включены в (1.31). Поскольку дрейфы, как сказано, происходят поперек магнитного поля, уравнения (1.31) неприменимы для составляющей скорости, параллельной полю \mathbf{H} , что является недостатком этой системы.

Магнитное поле «гидродинамизует» бесстолкновительную плазму благодаря тому, что частица не может свободно двигаться поперек поля. Вдоль поля гидродинамики нет, и поэтому простое образование заряда по (1.22) уже не будет иметь места. Можно принять, что $E_{\parallel} = \mathbf{E}\mathbf{H}/H$ обращается в нуль. Это видно непосредственно из (1.33), т. е. электрический потенциал вдоль линии \mathbf{H} отсутствует. Такое явление называют эквипотенциальностью силовых линий.

Отношение плотности магнитной энергии $H^2/8\pi$ к кинетической $\rho v^2/2$ может быть произвольно большим. В стационарном состоянии отношение обращается в бесконечность. Оно может быть и очень малым. Именно последняя ситуация интересна для кинематического динамо. Но это отношение не может обращаться в нуль, что означало бы отсутствие магнитного поля, но при $\mathbf{H} = 0$ магнитная гидродинамика в бесстолкновительной плазме не может быть обоснована.

Очень существенным параметром плазмы является отношение давления к магнитному:

$$\beta = 8\pi p/H^2.$$

Если на плазму наложено магнитное поле, возбуждаемое внешними источниками, то величина β может быть произвольной. Если же нас интересуют самосогласованные магнитные поля, т. е. поля, порождаемые токами в плазме; то относительно величины β можно высказаться более определенно. Действительно, рассмотрим изотермическую плазму (в которой температура электронов и ионов одинакова). Тогда токи определяются дрейфами из-за неоднородностей

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi nev_d/c,$$

v_d — скорость дрейфа. В изотермической плазме скорости ионного и электронного дрейфов одинаковы (и противоположны по знаку). Оценивая

$$v_d = v_i \rho_i / L$$

(L — масштаб неоднородности), получим

$$v_A^2 \approx v_i^2, \quad v_A = H/\sqrt{4\pi nM}.$$

Конечно, это есть оценка максимального поля, величина v_A может быть меньше v_i . Поскольку v_i близка к скорости звука s и, кроме того, $p \approx nMv_i^2$, получаем отсюда оценку

$$\beta \geq 1.$$

Итак, для самосогласованного поля величина β , характеризующая плазму в целом (т. е. усредненное значение β), больше единицы. В то же время в отдельных местах максимального поля H она может стать меньше единицы.

В плазме имеется пример конфигурации поля, когда токи не являются дрейфовыми. Это есть так называемое бессиловое поле, характеризваемое условием

$$\text{rot } \mathbf{H} = a\mathbf{H}.$$

Такое название оно приобрело из-за того, что при выполнении этого условия электромагнитная сила $[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ в (1.31) обращается в нуль. Токи при этом текут параллельно магнитному полю и не являются поэтому дрейфовыми. Отсюда, казалось бы, имеется возможность существования конфигурации с $\beta < 1$. В действительности же бессиловая конфигурация не может быть таковой во всем пространстве. Так же как в частном случае бестокового поля (когда $a = 0$ и $\text{rot } \mathbf{H} = 0$), бессиловое поле непременно должно создаваться внешними источниками. Если эти источники расположены в самой плазме, то мы возвращаемся к предыдущей оценке $\beta > 1$.

Резюмируем все сказанное. Для сравнительно низкочастотных и крупномасштабных процессов в космической плазме МГД-приближение применимо. Основная энергия электромагнитного поля магнитная. Электрическое поле можно исключить из уравнений, отсюда и название: магнитная гидродинамика. Идеальная МГД — это система (1.14), (1.31) (или (1.24) с $\chi = 0$).

4. Постановка задачи динамо

Быстрое изменение поля с частотой ν/L можно обеспечить довольно просто (см. подразд. 2). В то же время простое движение, например дифференциальное вращение, не способно неограниченно (по времени) поддерживать или усиливать поле (как отмечалось в подразд. 2, усиление поля временное). Конечно, время жизни поля t_0 (1.11) весьма велико, но все поле в конечном счете будет диссипировать. В астрофизических условиях поля возбуждаются в турбулентной среде. Речь об этом пойдет далее. Отметим только, что турбулентность приводит к перенормировке коэффициента D в (1.6), (1.7): D заменяется на турбулентный коэффициент D_T , причем $D_T \gg D$. Время жизни поля (1.11) с новым коэффициентом будет уже невелико. Поэтому вопрос о длительном поддержании поля встает особенно остро.

Другая сторона вопроса — быстрая переменность поля, продолжающаяся весьма длительное время. Например, солнечный

цикл: поле находится в колебательном режиме. Проблема динамо заключается в *неограниченно длительном поддержании поля* за счет энергии движения. Кинематическая теория динамо строится как линейная задача: поле скоростей задано, как в подразд. 1, обратная реакция магнитного поля на движение не учитывается. (Условия применимости этого подхода см. в подразд. 3; должны выполняться неравенства (1.25), (1.26).)

Проблема динамо возникла для объяснения *происхождения магнитных полей в космосе*. В настоящее время теория динамо привлекается для объяснения быстрой переменности полей. Так или иначе, но первое, что приходит в голову, — это воспользоваться принципом, аналогичным принципу динамо-машины (отсюда и появился термин «динамо»). Нужно, казалось бы, взять за основу генераторы с самовозбуждением; генераторы без обратной связи — с независимым возбуждением — будут аналогичны «полу-динамо» (см. подразд. 2).

Построить такую аналогию, однако, не удалось. Прежде всего это связано с тем, что для космической плазмы характерна большая однородность, чем в технических установках. В космосе нет изоляторов, обмоток и т. п. Поэтому генерацию космических полей называют иногда однородным динамо. Еще одна особенность космической плазмы — большие масштабы, приводящие к высокой индуктивности. Иначе это выражается условием $R_m \gg 1$ (1.27). Данная особенность сразу же не даст возможность осуществиться «тривиальному» механизму динамо. Так, хорошо известно, что в металлической рамке, вращающейся в магнитном поле или просто пересекающей силовые линии поля, возбуждается ЭДС. Это и есть принцип генератора. Если же сделать размеры всей установки (в том числе и толщину проволоки) очень большими, так, чтобы выполнялось условие $R_m \gg 1$, то генерация станет невозможной! Дело в том, что, как сказано, поле уже будет заморожено в проводящую рамку и пересечения силовых линий уже не будет, ЭДС поэтому перестанет возбуждаться.

Итак, теория динамо с динамо-машиной связана только названием (и самой общей идеей). Как же тогда строить теорию? Развитие теории началось с формального подхода — решения уравнения (1.7) при заданном поле v . Можно рассматривать задачу динамо в неограниченной проводящей среде. Тогда, чтобы исключить из рассмотрения внешние источники, следует пользоваться условием (1.10) на бесконечности. В ограниченном проводящем теле магнитное поле сшивается с вакуумным полем (1.9), обращаемым в нуль на бесконечности. Поле H непрерывным образом переходит через границу. Полезным оказывается также условие непрерывного перехода величины

$$\{\partial H_n / \partial x_n\} = 0,$$

фигурные скобки означают разницу значений на одной и другой сторонах границы, n — индекс нормальной составляющей. Итак, не только сама нормальная составляющая H_n непрерывно пере-

ходит через границу ($\{H_n\} = 0$), что получается при интегрировании по пограничному слою уравнения $\text{div } \mathbf{H} = 0$ (как это обычно делается в электродинамике). Непрерывно переходит через границу и производная нормальной компоненты в нормальном направлении.

Динамо может быть стационарным: $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$ и $[\mathbf{v} \mathbf{H}] = = \text{rot } D \text{ rot } \mathbf{H}$, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left(\frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] + \nabla \varphi \right).$$

Фактически это закон Ома. При этом генерация компенсируется омическими потерями.

5. Проблема собственных значений. Уменьшение масштаба поля

Важный класс задач — магнитное поле \mathbf{H} нестационарно, а движение \mathbf{v} не зависит от времени. Тогда естественно поставить задачу на собственные значения $\mathbf{H} \sim \exp(-Et)$:

$$E_m \mathbf{H}_m = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}_m] + D \Delta \mathbf{H}_m. \quad (1.34)$$

Можно ожидать, что среди собственных значений E_m этого уравнения окажется такое, у которого $\text{Re } E_m < 0$, что означает существование экспоненциально растущего решения. Если имеется решение с $\text{Re } E_m = 0$, $\text{Im } E_m \neq 0$, то, значит, существует решение, соответствующее колебательному режиму, тоже динамо-решение, поскольку поле поддерживается неограниченно долго. Наконец, если все E_m таковы, что $\text{Re } E_m > 0$, то динамо отсутствует. Уже сама постановка задачи на собственные значения (1.34) означает, что члены в правой части (1.34) играют одинаковую роль. Дело в том, что если, например, первый член много больше второго, то уравнение фактически меняет свой порядок. Задача на собственные значения для (1.34) с $D = 0$ не имеет смысла. В обратном предельном случае (второй член много больше первого) динамо просто отсутствует: имеет место диффузия поля (см. подразд. 1) и все $E_m = \text{Re } E_m > 0$.

Итак,

$$\begin{aligned} |\text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}_m]| &\approx |D \Delta \mathbf{H}_m|, \\ |(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m| &\approx |D \Delta \mathbf{H}_m|. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Для того чтобы согласовать оценки (1.35) с требованием (1.27), необходимо считать, что масштаб поля L и масштаб поля скорости l отличаются. Для скорости в космических условиях характерна очень большая величина

$$R'_m = vl/D \gg 1. \quad (1.36)$$

Следует ли отсюда, что масштаб поля \mathbf{H} , равный L , одного порядка с l ? Оценки (1.35) показывают, что нет. Очевидно, что $L \ll l$. Но тогда, казалось бы, $|(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v}| \ll |(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m|$ и с чле-

ном $(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v}$ в можно не считаться. Это, однако, приведет к отсутствию динамо-решения. Действительно, член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m$ описывает лишь перенос поля и тем самым сохранение его энергии, но усиление поля им не описывается (см. антидинамо-теоремы в подразд. 6, которые могут быть построены в тех случаях, когда остается лишь этот член). Итак, вид динамо-решения должен быть таким, чтобы величина $|(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m|$ была много меньше vH_m/L . Этого можно достичь, если силовые линии поля \mathbf{H}_m будут вытянуты вдоль \mathbf{v} (см. [14, рис. 10]). Итак,

$$|(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v}| \approx |(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m|.$$

Теперь остаются две возможности:

- 1) $|(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m| \approx |(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v}|,$
- 2) $|(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_m| \approx a |(\mathbf{H}_m \nabla) \mathbf{v}|, \quad a \ll 1.$

В первом случае имеем:

$$L = l (R'_m)^{-1/2}, \quad |E_m| \approx D/L^2 \approx v/l. \quad (1.37)$$

Во втором:

$$L = l (R'_m)^{-1/2} a^{-1/2} \gg l (R'_m)^{-1/2}, \quad (1.38)$$

$$|E_m| \approx D/L^2 \approx va/l \ll v/l.$$

Следует иметь в виду, что единственным безразмерным числом задачи (1.7) и (1.34) является R'_m . Поэтому $a = 1/(R'_m)^b$, $b > 0$. Итак, в первом случае инкремент максимален, частота v/l наибольшая в задаче. Во втором случае нарастание более медленное: $|E_m| \sim v/l (R'_m)^b$. Если $b = 1$, то инкремент достигнет своего минимального значения: $|E_m| \sim D/l^2$ — наиболее низкая частота в задаче. Первый случай назван в [15] быстрым динамо, второй — медленным.

Отметим, грубо упрощая, что на уравнение (1.34) можно смотреть как на задачу собственных значений уравнения Шредингера. Не будем обращать внимания на мнимую часть E_m . Тогда при отсутствии движения, $\mathbf{v} = 0$, имеем $E_m > 0$, что соответствует положительной энергии для частицы и инфинитному движению. Случай $\mathbf{v} = 0$ соответствует равенству нулю потенциала U в задаче Шредингера. Если $\mathbf{v} \neq 0$, то возможны динамо-решения, т. е. $\text{Re } E_m < 0$. Такие решения появляются при наличии ямы в потенциале, т. е. происходит захват частицы и финитное движение. Яма, конечно, должна быть достаточно глубокой, чтобы содержать хотя бы один уровень (см. [16, 17]). Что же эта аналогия нам дает? Непосредственно ею воспользоваться невозможно. Дело в том, что оператор правой части (1.34) не является самосопряженным. Поэтому невозможно использовать, например, вариационный принцип, выявляющий наличие уровня в яме. Тем не менее в некоторых задачах динамо такая аналогия оказывается содержательной. В этом можно убедиться в гл. III, подразд. 6.

Итак, мы приходим к важнейшему для теории динамо выводу: магнитное число Рейнольдса, которое определяется масштабом скорости по (1.36), весьма велико для космической плазмы. Утверждение о том, что $R_m \gg 1$, относится лишь к начальному этапу эволюции поля. Конечно, начальное поле (или, как его называют, затравочное поле) по масштабу не меньше l , поэтому и выписано первое неравенство (1.27). В процессе эволюции поля будет происходить уменьшение его масштаба до тех пор, пока R_m не станет порядка единицы. Вмороженность поля в плазму практически прекращается: это видно из оценок (1.35). Собственно говоря, так и должно быть: экспоненциально растущее решение, очевидно, подразумевает рост числа силовых линий поля через единичную площадку. Это было бы невозможным, если бы вмороженность имела место. Отметим, что временное усиление поля согласно подразд. 2 не приводит к уменьшению масштаба. Примером служит дифференциальное вращение, взаимодействующее с осесимметричным полем. Процесс же динамо обязательно связан с уменьшением масштаба поля.

Вообще уменьшение масштаба поля типично для космических магнитных полей. Это создает, по-видимому, главную трудность теории. С одной стороны, наглядные представления о вмороженности поля рушатся как раз тогда, когда генерация началась (т. е. масштаб поля дошел до минимального, после чего генерация включилась). С другой стороны, нельзя вернуться к техническому динамо, где вмороженности вообще нет. Иначе говоря, случай $R_m \gg 1$ нагляден, но не дает динамо, случай $R_m \ll 1$ характерен для техники и не интересен для космической плазмы. Для последней характерно $R_m \gg 1$ в начальный момент и $R_m \approx 1$ при работе динамо.

Проследим эволюцию поля и процесс уменьшения масштаба на простейшем примере. Уменьшение масштаба будет иметь место при взаимодействии неосесимметричного поля с дифференциальным вращением. Проиллюстрируем это на еще более простом примере: движение изображено на рис. 1.1, но оставим теперь зависимость полей от y (что эквивалентно рассмотрению поля, зависящего от φ , в шаре). Тогда уравнение для H_x -компоненты и его решение при пренебрежении диффузией имеют вид:

$$\partial H_x / \partial t = -v_y \partial_y H_x, \quad H_x = H_x^0(x, y - tv_y(x)), \quad (1.39)$$

где H_x^0 — начальное поле. Если бы v_y не зависела от x , то решение (1.39) описывало бы смещение поля в целом по оси y . При учете зависимости v_y от x получим уменьшение масштаба. Действительно, характерная величина H_x согласно (1.39) не меняется, в то время как производная по x растет и оценивается как

$$\frac{\partial}{\partial x} H_x = \frac{\partial}{\partial x} H_x^0 + \frac{\partial}{\partial y} H_x^0 \frac{\partial}{\partial x} v_y t \approx \frac{H_x^0}{L} \frac{v_y}{l} t, \quad t \gg \frac{l}{v}.$$

Итак, масштаб падает линейно со временем. Падение масштаба продолжается до тех пор, пока он не достигнет значения L_R , опре-

деляемого из (1.37) или (1.38). Здесь мы L обозначаем L_k , чтобы подчеркнуть, что масштаб поля отличается от начального. Конечный масштаб по (1.37) будет достигнут, очевидно, за время

$$t = \frac{l}{v} \frac{L_0}{l} (R'_m)^{1/2} a^{1/2}, \quad a = \frac{1}{(R'_m)^b},$$

L_0 — начальный масштаб поля; в этой оценке полагаем $L_0 \approx l$. Для быстрого динамо ($b = 0, a = 1$) значение t весьма велико по сравнению со «временем поворота ячейки» l/v , т. е. $t = (R'_m)^{1/2} l/v$. Для медленного динамо t меньше. Для предельно медленного динамо ($b = 1, a = (R'_m)^{-1}$) $t = l/v$. Следовательно, быстрое динамо не такое уж «быстрое»: оно требует большого времени установления. И наоборот, медленное динамо быстро устанавливается. Отметим, что время установления и время усиления (обратный инкремент) сравниваются, если

$$b = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{l}{v} (R'_m)^{1/3}, \quad |E_m| = \frac{v}{l} (R'_m)^{-1/3}. \quad (1.40)$$

Утверждение о большом времени установления динамо-процесса кажется на первый взгляд противоречащим проблеме собственных значений (1.34). Действительно, если имеется E_0 , такое, что $-\text{Re} E_0 \approx v/l$, то такая быстро растущая экспонента с показателем v/l должна «задавить» все остальные собственные решения за время l/v . В действительности же это не так.

Описание эволюции поля дается общим решением уравнения (1.7) через собственные функции

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \sum a_m^{(p)} \mathbf{H}_m^{(p)}(\mathbf{x}) \Psi_m^{(p)}(t),$$

$$\Psi_m^{(p)}(t) = t^p \exp(-E_m t). \quad (1.41)$$

Для $p = 0$ имеем собственные решения. Величина $p = 0, 1, 2, \dots, N, N$ — кратность вырожденного решения. Присоединенное решение $\Psi_m^{(p)} = t^p \exp(-E_m t)$ появляется из-за отмеченной выше несамосопряженности оператора правой части (1.34). Коэффициенты $a_m^{(p)}$, $p \neq 0$, экспоненциально велики, т. е. пропорциональны $\exp(R'_m)^b$ так, чтобы компенсировать экспоненту $\exp(-E_0 t)$ до момента, когда динамо включится.

В заключение этого подраздела вернемся к аналогии собственной задачи (1.34) с уравнением Шредингера. Очевидно, что оператор (1.34) обладает положительным спектром собственных значений: $\text{Re} E_m > 0$. Таких E_m бесконечное множество. Собственные решения — решения типа $H_m \sim \exp i(kx)$, $k^2 \gg v/lD$. Для них $R_m \ll 1$ и $\text{rot}[v\mathbf{H}_m]$ не играет роли. Это затухающие решения (аналог инфинитного движения). Имеется ли уровень в яме, т. е. имеется ли E_0 , такое, что $\text{Re} E_0 < 0$, — в этом состоит проблема динамо.

6. Простые модели динамо

Как отмечалось в подразд. 4, построение теории пошло первоначально по формальному пути: решение (1.7) при заданном \mathbf{v} . При этом поле пытались задавать в достаточно простом (в математическом смысле) виде. Разумеется, \mathbf{v} не зависит от времени. Первая попытка была совершена Каулингом [18], который рассмотрел случай стационарного динамо: $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$ (см. подразд. 4), поле \mathbf{v} имеет вид (в сферической системе) $\mathbf{v} = \{v_\varphi, 0, 0\}$. Каулинг показал, что такое динамо невозможно. Более сложный случай рассмотрел Эльзассер [19]. Он показал, что движение

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{e}_r \psi \quad (1.42)$$

(\mathbf{e}_r — радиальный единичный вектор, ψ — произвольная функция) не способно генерировать поля, если D зависит только от $|\mathbf{x}|$. Движение (1.42) включает в себя теорему Каулинга в частном случае (ψ не зависит от φ), при этом линии тока лежат на тороидах. Поэтому теорему Эльзассера стали называть «тороидальной» теоремой.

Модифицируем (1.42) следующим образом:

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{e} \psi, \quad (1.43)$$

\mathbf{e} — единичный вектор. Примем систему (декартовых) координат, такую, чтобы $\mathbf{e} = \{0, 0, 1\}$, тогда \mathbf{v} будет лежать в плоскости XU . Невозможность динамо для движений (1.43), т. е. лежащих в плоскости, доказана Зельдовичем [20] (при этом D может зависеть только от z). Если теперь вектор \mathbf{e} направить по \mathbf{e}_φ в цилиндрической системе координат $\{\rho, \varphi, z\}$, то невозможность динамо можно доказать лишь для полей, не зависящих от φ .

Проиллюстрируем способ вывода антидинамо-теорем на примере плоского случая (1.43). Уравнение для H_z -составляющей поля имеет вид

$$\partial H_z / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) H_z = D \Delta H_z. \quad (1.44)$$

Это аналог уравнения теплопроводности, и $H_z \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В этом можно убедиться, если умножить (1.44) на H_z и проинтегрировать по всему пространству. При этом следует иметь в виду граничные условия (1.10). Пусть $H_z = 0$. Тогда решение уравнения для вектор-потенциала \mathbf{A} ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$)

$$\partial \mathbf{A} / \partial t = [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}] + \nabla \psi - D \text{ rot rot } \mathbf{A} \quad (1.45)$$

(ψ — произвольная функция) можно искать в виде (общий вид \mathbf{A} при $H_z = 0$, $\partial_x H_x + \partial_y H_y = 0$)

$$\mathbf{A} = \nabla \varphi + \{0, 0, A'_z\}.$$

Такое решение удовлетворяет (1.44) при

$$\frac{\partial}{\partial t} A'_z + (\mathbf{v} \nabla) A'_z = D \Delta A'_z, \quad \partial \varphi / \partial t = \psi - D \partial_z A'_z,$$

дающему, так же как и в случае (1.44), затухание A_z^* при $t \rightarrow \infty$. Поведение же $\nabla\varphi$ не существенно для магнитного поля \mathbf{H} , следовательно, затухает в конце концов не только компонента поля H_z , но и H_x , H_y .

Обратим внимание на то, что ψ в (1.42) и в (1.43) *зависит от всех координат, так что движение не двумерное*. В случае (1.42) оно тороидальное, т. е. поле скорости лежит на сферических поверхностях, в случае (1.43) — плоское (но зависимость от z сохраняется). Все антидинамо-теоремы основаны на том, что одна из компонент поля отделяется. Для случая (1.42) отделяется H_r , для (1.43) — H_z . Строгое и последовательное изложение антидинамо-теорем было дано в работе [21], интересное обобщение на сжимаемую среду — в [22]. В последней работе доказательство кардинальным образом отличается от изложенного выше, свойства динамо выводятся исключительно с помощью анализа полей, лежащих на поверхности тела.

До сих пор в этом подразделе были лишь негативные утверждения: антидинамо-теоремы. Мы с этого начали потому, что именно так начала развиваться теория динамо — с отрицаний. Первоначально это произвело большое впечатление на астрофизиков и геофизиков: многим казалось, что теорема Каулинга закрывает возможность действия динамо вообще. Вскоре, однако, стало ясно, что антидинамо-теоремы могут быть доказаны лишь для специальных движений. Действительно, любое поле \mathbf{v} , $\text{div } \mathbf{v} = 0$, можно записать в виде $\mathbf{v} = [\nabla\varphi\nabla\psi]$ (φ , ψ — произвольные функции), так что вектор \mathbf{v} лежит на поверхности $\psi = \text{const}$ (точнее, на пересечении двух поверхностей: $\psi = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$). Если поверхность $\psi = \text{const}$ (или $\varphi = \text{const}$) есть плоскость или сфера, то динамо невозможно. Уже в случае, когда $\psi = \text{const}$ есть цилиндрическая поверхность, антидинамо-теорема не доказывается. То же самое можно утверждать, если D зависит не только от z для движения (1.43) и не только от r для движения (1.42).

Первая точная динамо-модель была построена Герценбергом: генерацию дают два твердотельно вращающихся проводящих шара, погруженных в проводящую среду [23]. Затем Лортц [24] показал, что поле генерируется винтовым движением (см. такой же случай в [25, 26]), а Тверской [27] — тороидальным вихрем. Интересно отметить, что винтовое движение — двумерное, в примере [28] поле зависит лишь от x , y , но есть и v_z -составляющая. В конце концов моделей стало так много, что, по мнению Буссе [5], необходимо находить \mathbf{v} согласованно из уравнения движения: кинематическое динамо не дает фактически ограничений на скорость. В частности, как сказано выше, невозможно доказать антидинамо-теорему для осесимметричных \mathbf{v} и D . Осесимметричное магнитное поле не будет усиливаться, но неосесимметричное в принципе может. С другой стороны, если мы попытаемся определить движение по известному (пусть осесимметричному) полю (обратная задача), то ясно, что это движение будет неосесимметричным. Но этой информации о движении крайне мало.

Построение динамо-модели на простейшем примере движения — дифференциально вращающемся цилиндре — будет дано в следующем подразделе. Здесь мы только отметим, что, как это ни странно, гораздо более сложные движения — турбулентного типа — куда чаще привлекаются для объяснения космических магнитных полей, чем простое ламинарное.

В заключение остановимся на вопросе необходимых и достаточных критериев динамо. Нахождение их сыграло бы фундаментальную роль в теории. Но, увы, они совершенно неизвестны. Построение приведенных выше моделей возбуждения не дало возможности сконструировать более общие достаточные критерии. Утверждение же, что «для динамо необходимо, чтобы v не удовлетворяло (1.42) и (1.43)», не конструктивно. Желательно выяснить хотя бы необходимые и достаточные условия быстрого динамо. Можно ли при этом пользоваться тем, что отделение одной из компонент (как в (1.44)) поля имеет место только при $D \rightarrow 0$ (см. [29])? Например, для цилиндрически симметричного движения отделяется H_ρ -компонента при $D \rightarrow 0$. Но пользоваться этим нельзя, разумеется. Дело в том, что, как сказано в подразд. 5, в процессе генерации масштаб поля мал и член с $D\Delta H$ сравним с остальными. Чем меньше D , тем меньше L (см. (1.37), (1.38)), и устремление D к нулю некорректно. Неудивительно поэтому, что анализ на основании $D \rightarrow 0$ привел авторов [30] к нахождению неправильного критерия. Утверждается, что определяющей является величина av , $\operatorname{rot} a = v$. В действительности же при

$$av \neq 0 \tag{1.46}$$

о динамо-процессе ничего утверждать нельзя. Если (1.46) выполняется, то динамо может быть медленным или отсутствовать (пример (1.43) с ψ , зависящей от z), а может быть и быстрым — для стохастической скорости (см. гл. III). Если же (1.46) не выполняется, т. е. $av \equiv 0$, то опять же динамо может быть медленным или даже отсутствовать (скорость по (1.43) с ψ , не зависящей от z), а также быстрым (см. гл. III, подразд. 11).

7. Дифференциально вращающийся цилиндр

Методы решения динамо-уравнения. Уравнение (1.7) для стационарного поля скорости оказывается сложным. К настоящему времени разработано несколько методов. Уравнение (1.7) есть линейное уравнение математической физики с неоднородными коэффициентами (v зависит от координат). Перечислим возможные методы решения.

1. Поле v не зависит от координат (или описывается твердотельным вращением) и скачком (на некоторой поверхности) переходит в другое значение $v = \text{const}$ (или с другой постоянной угловой скоростью). Тогда (1.7) есть уравнение с кусочно-непрерывными коэффициентами, и сшивка полей на скачке осуществляется, как обычно, интегрированием (1.7) по переходному слою.

2. Генерация осуществляется движениями, сосредоточенными в узкой области: несколько вращающихся цилиндров с угловыми скоростями $\omega_j \sim A_j \delta(r - r_j)$. Модель называют роторным динамо. Решение ищется в виде решения (1.7) с $v = 0$, но с источниками в точках r_j (функция Грина).

3. Импульсная модель — описание дадим далее.

4. Построение решений по теории возмущений. Малый параметр R'_m . Разумеется, его недостаточно: если $R'_m \ll 1$, то, казалось бы, динамо вообще невозможно. Оказывается, для крупномасштабного поля, такого, чтобы $R_m \gg 1$, генерация возможна [4]. Итак, здесь необходимо наличие двух малых параметров: $R'_m \ll 1$ и $l/L \ll 1$. В крупномасштабном поле \mathbf{V}_0 (масштаб L) возникают флюктуации масштаба l из-за возмущения поля скоростью. Флюктуации вычисляются по теории возмущений (D в (1.7) велико, так как $R'_m \ll 1$). Далее вычисляется реакция флюктуаций поля на крупномасштабное \mathbf{V}_0 .

5. С. И. Брагинский разработал теорию возмущений для $R'_m \gg 1$ при слабом отклонении движения от осевой симметрии [31]. Малым параметром как раз и является отклонение от симметрии. Модель называют «почти симметричным динамо».

В этом подразделе мы проиллюстрируем генерацию поля на примере простейшего типа движения — дифференциального вращения. Прикладное значение такого рассмотрения очевидно. Дело в том, что условие реализации динамо-модели в природе определяется тем, насколько простым является именно поле скорости, поскольку магнитное поле само подстраивается под движение. В частности, для простого симметричного движения магнитное поле несимметрично (см. подразд. 6.)

Дифференциально вращающийся цилиндр описывается движением (в цилиндрической системе (ρ, φ, z))

$$\mathbf{v} = \{0, v_\varphi(\rho), 0\},$$

которое является одновременно и «тороидальным» (1.42) (ψ не зависит от φ), и плоским (1.43) (ψ не зависит от z и φ). Движение одномерно, скорость зависит лишь от ρ . Теоремы (1.42), (1.43) исключаются в данном случае тем, что D зависит от x, y (напомним, что для действия теоремы (1.42) необходимо, чтобы D зависело только от $|x|$, а для (1.43) — от z).

Описание импульсной модели. Если раскладывать решение (1.7) и поле \mathbf{v} по собственным функциям задачи (1.8), то получится бесконечная система алгебраических уравнений для коэффициентов — множителей при собственных функциях (метод Галеркина). Поскольку динамо можно надеяться получить при $R'_m \approx 1$, то, по-видимому, достаточно оставить лишь несколько нижних гармоник — собственных функций. Однако расчеты показывают, что их все-таки должно быть много, ибо динамо по методу Галеркина получалось даже тогда, когда оно запрещено антидинамо-

теоремой. Это, вероятно, связано с тем, что критическая величина R'_m , при которой динамо уже имеет место, численно велика.

В квантовой механике можно ограничиться двухуровневым (или одноуровневым) приближением, т. е. в методе Галеркина оставлять две (одну) гармоники в случае, если имеется «энергетическая щель», т. е. эти нижние уровни отделены от остальных. Специальным подбором граничных условий можно добиться того, что (1.8) будет содержать энергетическую щель. Но такие модели в настоящее время не разработаны.

Оказывается, что в теории динамо можно ограничиться одно-модовым приближением, когда спектр собственных значений не имеет щели. Пусть декременты задачи (1.8) расположены в порядке возрастания:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \dots$$

При этом нельзя утверждать, что $|\gamma_2 - \gamma_1| \gg \gamma_1$, т. е. уровни расположены близко, энергетической щели нет. Тем не менее в импульсной модели можно ограничиться одномодовым приближением. Это связано с тем, что, в отличие от квантовой механики, здесь возможно растущее решение.

Рассмотрим импульсную модель генерации поля, когда движение продолжается короткий промежуток времени T_1 , во время которого оно весьма интенсивно (такое, что $R'_m \gg 1$). Затем движение выключается, и все гармоники магнитного поля затухают, кроме нижней. Далее опять включается интенсивное движение, и поле усиливается и т. д. (см., например, [27]).

Обоснование импульсной модели следующее. За период импульса T_1 , когда включено движение среды, поле усиливается линейно со временем (как H_φ -компонента при дифференциальном вращении согласно (1.19)). За время T_1 оно усилится от H_0 — начального значения — до $H_1 = T_1 H_0 v/l$. На этом этапе диссипацией можно пренебречь, поскольку считается, что $R'_m \gg 1$. При этом важно следить за тем, чтобы масштаб поля не уменьшался (как опять-таки в модели (1.19)). В противном случае, как подчеркивалось в подразд. 5, масштаб поля дойдет до того, что R_m станет близко к единице, и поле начнет быстро затухать. Максимальное значение поля гораздо ниже, чем выписанное выше H_1 . В сущности генерация тогда станет невозможной.

Будем полагать, что начальное поле H_0 описывается нижней гармоникой (декремент γ_1) с амплитудой a_1 . В конце первого этапа амплитуда станет

$$a_1 (v/l) T_1 (l/l_0)^n;$$

l_0 — размер проводящего тела в целом. Здесь множитель $(l/l_0)^n$, $n > 0$, появился при проецировании поля H_1 на нижнюю гармонику. Показатель n зависит от размерности или от геометрии движения, $l_0 > l$. Одновременно генерируется несколько нижних гармоник, причем амплитуда их примерно одинакова.

На втором этапе, продолжающемся время T_2 , в течение которого движение отсутствует, происходит диссипация поля. Потребуем, чтобы T_2 удовлетворяло условию

$$(\gamma_2 - \gamma_1) T_2 \gg 1,$$

тогда автоматически получится $(\gamma_3 - \gamma_1) T_2 \gg 1$, $(\gamma_4 - \gamma_2) T_2 \gg 1$ и т. д. Поэтому к концу второго этапа амплитуда второй гармоники будет в $\exp(\gamma_2 - \gamma_1) T_2$ раз меньше первой, амплитуда третьей — в $\exp(\gamma_3 - \gamma_1) T_2$ раз меньше и т. д.

Итак, к концу второго этапа поле возвращается к тому виду, который оно имело до начала первого этапа. Осталась только нижняя гармоника, остальные имеют амплитуды экспоненциально-малые по сравнению с амплитудой нижней гармоники. Следует, однако, учесть, что и первая гармоника тоже экспоненциально затухает в продолжение второго этапа. Обычно

$$\gamma_2 - \gamma_1 \approx \gamma_1$$

(щель отсутствует), и потому $\gamma_1 T_2$ тоже велико по сравнению с единицей. Амплитуда нижней гармоники уменьшится в $\exp \gamma_1 T_2$ раз. Потребуем тем не менее, чтобы в конце второго этапа амплитуда первой гармоники стала $a_1 \exp(T_1 + T_2) \gamma_1$, т. е. возросла в $\exp(T_1 + T_2) \gamma_1$ раз по сравнению с тем, чем она была до начала первого этапа. Это приводит к условию

$$(v/l) T_1 (l/l_0)^n \exp(-\gamma_1 T_2) = \exp(T_1 + T_2) \gamma_1. \quad (1.47)$$

Положим для конкретности $T_1 = T_2$, $T_1 \gamma_1 = 10$, тогда

$$(v/l) \approx (\gamma_1/10) (l_0/l)^n e^{30} \gg \gamma_1 (l_0/l)^2. \quad (1.48)$$

Равенство в (1.48) — следствие (1.47). Неравенство (1.48) — это приведенное выше условие $R'_m \gg 1$ первого этапа. Действительно, в правой части (1.48) выписано

$$\gamma_1 (l_0/l)^2 \approx (D/l_0^2) (l_0/l)^2 = D/l^2$$

— декремент омического затухания поля масштаба l . Поле такого масштаба генерируется на первом этапе (при условии, что не происходит уменьшения масштаба!).

Итак, нижняя гармоника возросла за полный период $T_1 + T_2$ в $\exp \gamma_1 (T_1 + T_2)$ раз, а остальные гармоники экспоненциально-малы. Следовательно, в конкретной модели необходимо следить, чтобы:

- 1) усиление поля не сопровождалось уменьшением масштаба;
- 2) усиленное поле давало ненулевой вклад в нижнюю гармонику, т. е. чтобы при проецировании усиленного поля на нижнюю гармонику не получался нуль.

Импульсная модель кажется несколько странной. В частности, согласно (1.48) скорость должна быть экспоненциально-большой. Между тем интуитивно, именно так были построены наглядные модели. Так, в модели Дэвиса (см. [1] и [15]) начальное тороидаль-

ное поле перекручивается движениями среды. Тор превращается в два тора, меньших по размеру. Если теперь совместить оба тора так, чтобы их поля были параллельны друг другу, то общее поле удвоится. Здесь, однако, есть хитрость. Тор невозможно превратить перекручиванием силовых линий в два тора в случае полной вмороженности. Невозможно разорвать силовые линии поля! Поэтому следует включить в рассмотрение конечную диссипацию. Но при $R_m \gg 1$ диссипация ни в коей мере не успеет превратить один тор в два: процесс диссипации очень медлен. Поэтому следует уменьшить масштаб поля до того, что R_m станет порядка единицы. Но при этом все описание эволюции поля рухнет: изложение существенно использовало условие вмороженности. Следовательно, строгое обоснование модели Дэвиса возможно лишь в импульсной модели. Здесь интуитивно (мысленно) вводился этап диссипации всего «лишнего» поля и оставалось только тороидальное — самое крупномасштабное.

Импульсная модель позволяет надеяться (при получении положительного результата) на то, что генерация будет иметь место для $R'_m \ll 1$, но $R_m = vl_0/D \gg 1$ (т. е. $l_0 \gg l$, в этом случае поле скорости слабо возмущает магнитное поле нижней гармоники). Движение при этом стационарное. Можно надеяться на то, что динамо будет иметь место в стационарном поле скорости при $R'_m \approx 1$ или даже при $R'_m \gg 1$, если импульсная модель дала динамо-решение. Но, к сожалению, ничего большего, чем надежда, здесь нет. Импульсная модель ничего не доказывает для случая $R'_m > 1$ при стационарном движении. Она лишь показывает принципиальную возможность динамо.

Часто для обоснования наглядных моделей привлекается турбулентная диффузия. Как уже отмечалось, $D_T \gg D$ и время t_0 по (1.11) сокращается. Так, в известной модели солнечного цикла Паркера [6] тороидальное поле, которое генерируется, как в (1.18), (1.19), дифференциальным вращением, возмущается радиальной конвекцией. Образующиеся петли магнитного поля поворачиваются на 90° кориолисовой силой и образуют среднее поле, параллельное или антипараллельное нижней гармонике — полю диполя. Здесь тоже необходима диссипация на двух этапах: во-первых, петли должны отщепиться от тороидального поля, во-вторых, они должны потом слиться в поле диполя. Для этого и используется турбулентная диффузия. Строгое обоснование этой картины для $R'_m \gg 1$ возможно для турбулентного движения (см. далее гл. II).

Здесь мы тоже (механически) введем более сильную диссипацию. Модифицируем импульсную модель следующим образом. Первый этап оставим без изменения. Для второго считаем, что электропроводность существенно ниже той, что была на первом этапе. Тем самым мы включаем большую диффузию. Разумеется, эта модификация ускорит процесс генерации в импульсной модели. Действительно, спектр собственных значений (декрементов) те-

перь станет $k\gamma_1, k\gamma_2, k\gamma_3, k \gg 1$. Примем $k\gamma_1 T_2 = 2$. Тогда высшие гармоники в конце второго этапа будут в e^2 раз меньше основной. Кроме того, пусть $T_2 = l/v$. Потребуем теперь, чтобы, в отличие от (1.47), поле в конце второго этапа было в e раз больше начального. Тогда вместо (1.47) имеем

$$(vT_1/l) (l/l_0)^n \exp(-k\gamma_1 T_2) = e.$$

Отсюда

$$T_1 = e^3 (l_0/l)^n (l/v). \quad (1.49)$$

Это и есть время усиления (время второго этапа существенно меньше). При $l_0/l \approx 1$ это время все же больше l/v , т. е. динамо «не совсем» быстрое, но и не медленное: T_1 не пропорционально $(R'_m)^b$, $b > 0$. В (1.49) не входит электропроводность. С другой стороны, требование вмороженности на первом этапе

$$v/l \gg \gamma_1 (l_0/l)^2$$

(ср. с (1.48)) приводит к тому, что это время значительно меньше диссипативного l^2/D .

Еще одна модификация импульсной модели — требование стационарности динамо. Тогда вместо $\exp(T_1 + T_2) \gamma_1$ в правой части (1.47) следует поставить единицу и вместо e^{30} в (1.48) следует писать e^{10} . Здесь мы обратим внимание на следующее обстоятельство. В сущности для наличия экспоненциально растущего решения левую часть (1.47) можно приравнять любому числу, большому единицы. Конкретный вид (1.47) выбран из соображений удобства. Поэтому здесь фактически нет ограничений на амплитуду v . Другое дело — стационарное динамо: справа (1.47) стоит именно единица и параметры модели должны быть специально подобраны. То же самое относится к знакопеременному динамо без раскачки, т. е. $H \sim \exp(-Et)$, $\text{Re}E = 0$. Здесь тоже следует в правой части (1.47) ставить единицу (поскольку в нем выписаны модули амплитуд) и требовать, чтобы a_1 имела знак, обратный тому, который получается при проецировании усиленного поля на начальное. Иначе говоря, усиливается поле, противоположное по знаку начальному. Здесь, как сказано, требуется подгонка параметров модели по (1.47) с заменой правой части на единицу, и вместо (1.48) имеем

$$\frac{v}{l} = \frac{\gamma_1}{10} \left(\frac{l_0}{l}\right)^n e^{10} \gg \gamma_1 \left(\frac{l_0}{l}\right)^2.$$

Описание модели. Проводящая среда расположена в области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Поверхность $y = 0$ граничит с вакуумом, который продолжается в область $y < 0$. По координате x он ограничен поверхностями $x = 0$ и $x = a$. Итак, вакуум расположен в области $0 \leq x \leq a$, $y < 0$. В остальной части пространства расположен сверхпроводник. Дифференциально вращающийся цилиндр находится, разумеется, в проводящей среде с осью, па-

параллельной оси z (рис. 1.2). Напомним теперь, что антидинамо-теорема для движений (1.42), (1.43) была доказана для случая, когда D зависит от $|x|$ и z . Здесь же D меняется на плоскости XU . Что, если попытаться доказать антидинамо-теорему? Уравнение для H_z -составляющей имеет вид (1.44). Однако на границе с вакуумом нормальная компонента тока должна обращаться в нуль:

$$\partial H_z / \partial x - \partial H_x / \partial z = 0. \quad (1.50)$$

На это выражение можно смотреть как на граничное условие для H_z , связывающее эту компоненту с H_x . Таким образом, H_z -ком-

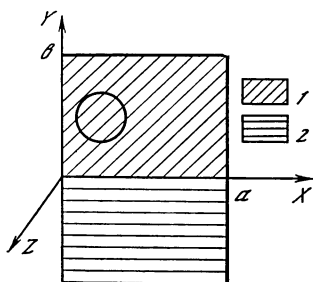


Рис. 1.2.

Импульсная модель дифференциально вращающегося цилиндра

1 — проводник, 2 — вакуум (остальную область занимает сверхпроводник)

Условия однородны по оси Z , окружность — проекция цилиндрической поверхности на плоскость XU

понента не отделяется и антидинамо-теорема не может быть доказана.

Собственные функции. Выпишем граничные условия для уравнения (1.7). На всех границах непрерывными являются нормальная компонента магнитного поля и тангенциальная — электрического [33]:

$$\{H_n\} = 0, \quad \{E_t\} = 0.$$

Рассмотрим прежде всего границу проводящая среда—сверхпроводник. Поле в сверхпроводнике отсутствует, поэтому

$$H_n = 0.$$

Воспользуемся теперь уравнением (1.1) с учетом (1.5). Нормальная к границе компонента скорости v_n тоже должна обращаться в нуль, поэтому вектор $[vH]$ на границе не обладает тангенциальной компонентой. Рассмотрим тангенциальную компоненту этих уравнений, поделив их предварительно на σ . Током смещения по-прежнему пренебрегаем. Величина $\text{rot } H / \sigma$ обращается в нуль в сверхпроводнике ($\sigma \rightarrow \infty$), поэтому из непрерывности E_t следует, что $\{\text{rot}_t H / \sigma\} = 0$ и $\text{rot}_t H = 0$ на границе проводника.

Выпишем эти условия конкретно для границ:

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad 0 \leq y \leq b \\ x=a, \quad 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq x \leq a, \quad y=b \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} \partial H_y / \partial x = \partial H_z / \partial x = 0, \quad H_x = 0; \\ \partial H_x / \partial y = \partial H_z / \partial y = 0, \quad H_y = 0. \end{aligned}$$

На границе проводящая среда—вакуум ($0 \leq x \leq a, y = 0$) поле непрерывно ($\{\mathbf{H}\} = 0$). Учитывая это обстоятельство, а также то, что в вакууме $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, получаем обращение в нуль нормальной составляющей тока в среде (условие (1.50)). Наконец, на границе вакуум—сверхпроводник $\mathbf{H}_n = 0$ (для магнитного поля условие непрерывности \mathbf{E}_t здесь оказывается бесполезным).

Указанным выше граничным условиям, а также условию соленоидальности $\text{div } \mathbf{H} = 0$ удовлетворяют два семейства гармоник, представляющих собой полную систему собственных функций. В среде

$$1) H_x = -k_x \sin k_x x \cos k_y (y - b) \exp ik_z z,$$

$$H_y = \frac{\kappa^2}{k_y} \cos k_x x \sin k_y (y - b) \exp ik_z z,$$

$$H_z = ik_z \cos k_x x \cos k_y (y - b) \exp ik_z z,$$

$$2) H_x = -ik_z \sin k_x x \cos k'_y (y - b) \exp ik_z z,$$

$$H_y = 0,$$

$$H_z = k_x \cos k_x x \cos k'_y (y - b) \exp ik_z z.$$

В вакууме

$$1) H_x = -k_x \cos k_y b \sin k_x x \exp (\kappa y + ik_z z),$$

$$H_y = \kappa \cos k_y b \cos k_x x \exp (\kappa y + ik_z z),$$

$$H_z = ik_z \cos k_y b \cos k_x x \exp (\kappa y + ik_z z),$$

$$2) H_x = 0, H_y = 0, H_z = 0.$$

Здесь $\kappa = (k_x^2 + k_z^2)^{1/2} > 0$, k_x есть решение уравнения $\sin k_x a = 0$, k_y — уравнения $\text{tg } k_y b = -k_y/\kappa$ и k'_y — уравнения $\cos k'_y b = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что выписанные два семейства гармоник представляют собой ортогональную систему во всем пространстве (включая вакуум).

Доказательство существования динамо-решения. Рассмотрим теперь возбуждение поля на первом этапе импульсной модели. Поместим дифференциально вращающийся цилиндр с осью симметрии, параллельной оси z , таким образом, чтобы эта ось проходила через точку с координатами $x = x_0, y = y_0, 0 < x_0 < a, 0 < y_0 < b$, причем радиус цилиндра l удовлетворяет условию $l \ll a, b$. Условие это вводится для упрощения выкладок, в общем оно не обязательно. Интересно отметить в связи с этим, что, полагая l малым, мы тем самым используем элементы роторного динамо (см. начало данного подраздела). Действительно, как мы увидим далее, устремляя l к нулю, для работы динамо необходимо одновременно полагать, что $\omega(r) \rightarrow \infty$ (ω — угловая скорость цилиндра).

Введем цилиндрическую систему координат с центром в точке $x = x_0, y = y_0$. Тогда уравнение (1.14) (напомним, что на первом этапе импульсной модели мы пренебрегаем диссипацией) будет

иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial t} + \omega \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \omega \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} &= r H_r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} + \omega \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} &= 0, \quad r \leq l. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Угловая скорость включается при $t = 0$, далее ω не зависит от t в промежутке $0 < t < T_1$. Теперь, как отмечалось выше, необходимо выделить компоненту поля, которая усиливается в процессе движения, не уменьшаясь в масштабе. Покажем, что масштаб составляющей поля, зависящей от φ , уменьшается. В самом деле, представим поле в виде

$$\mathbf{H} = \langle \mathbf{H} \rangle + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{H}^{(m)}(r) \exp im\varphi.$$

Здесь $\langle \mathbf{H} \rangle$ — осесимметричная, т. е. не зависящая от φ , составляющая. Тогда согласно (1.51) решение для $H_r^{(m)}$ имеет вид

$$H_r^{(m)}(r, t) = H_r^{(m)}(r, 0) \exp(-im\omega\varphi t)$$

и аналогичное решение для $H_z^{(m)}$. Модуль величин $H_r^{(m)}$ и $H_z^{(m)}$ не зависит от времени, в то время как производная по r растет пропорционально $t \partial\omega/\partial r$ (ср. с (1.39)). Иначе говоря, масштаб падает линейно со временем. Что касается величины $H_\varphi^{(m)}$, то модуль ее растет пропорционально $tr H_r^{(m)} \partial\omega/\partial r$, но масштаб, конечно, падает так же, как у $H_r^{(m)}$. Итак, модуль всего поля растет линейно со временем, а масштаб падает тоже линейно со временем. Проекция же такого поля на нижнюю гармонику не растет, а потому это поле не годится для импульсной модели.

Что касается осесимметричной части, то из (1.51) следует:

$$\begin{aligned} \langle H_r(t) \rangle &= \langle H_r(0) \rangle, \quad \langle H_z(t) \rangle = \langle H_z(0) \rangle, \\ \langle H_\varphi(t) \rangle &= r \frac{\partial \omega}{\partial r} t \langle H_r(0) \rangle + \langle H_\varphi(0) \rangle. \end{aligned}$$

Поле растет линейно со временем, не меняя своего масштаба при больших t . Напомним, что аналогичным образом росло поле H_y (не зависящее от y) в модели (1.16), (1.17) и поле H_φ (не зависящее от φ) для дифференциального вращения (1.19).

Рассмотрим теперь, какой вклад дает растущее поле (1.51) в нижние гармоники. Прежде всего выпишем нижние гармоники каждого из двух типов:

$$\begin{aligned} H_x^{(1)} &= 0, \\ H_y^1 &= \frac{k_z^2}{k_y^{(1)}} \sin k_{y_0}^{(1)}(y - b) \exp ik_z z, \end{aligned}$$

$$H_z^{(1)} = ik_z \cos k_y^{(1)} (y - b) \exp ik_z z,$$

$$H_x^{(2)} = -ik_z \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi (y - b)}{2b} \exp ik_z z,$$

$$H_y^{(2)} = 0,$$

$$H_z^{(2)} = \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi (y - b)}{2b} \exp ik_z z,$$

где $k_y^{(1)}$ — наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} k_y b = -k_y/\kappa$. Поле в вакууме не выписано, поскольку поле усиливается только в проводящей среде, и усиленное поле будет проектироваться на нижнюю гармонику только в проводящей среде. Из (1.51) видно, что прежде всего важно найти величины $\langle H_r(0) \rangle$, $\langle H_\varphi(0) \rangle$, соответствующие выписанным гармоникам. Переход к цилиндрической системе и усреднение по φ для выделения осесимметричной части дает:

$$\langle H_r^1 \rangle = \frac{k_z^2}{k_y^{(1)}} \frac{\exp ik_z z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin [k_y^{(1)} (r \sin \varphi + y_0 - b)] d\varphi,$$

$$\langle H_\varphi^{(1)} \rangle = \frac{k_z^2}{k_y^{(1)}} \frac{\exp ik_z z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin [k_y^{(1)} (r \sin \varphi + y_0 - b)] d\varphi = 0,$$

(1.52)

$$\langle H_r^{(2)} \rangle = -ik_z \frac{\exp ik_z z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \frac{\pi (r \cos \varphi + x_0)}{a} \times$$

$$\times \cos \frac{\pi (r \sin \varphi + y_0 - b)}{2b} d\varphi,$$

$$\langle H_\varphi^{(2)} \rangle = ik_z \frac{\exp ik_z z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin \frac{\pi (r \cos \varphi + x_0)}{a} \times$$

$$\times \cos \frac{\pi (r \sin \varphi + y_0 - b)}{2b} d\varphi.$$

Напомним, что в течение первого этапа импульсной модели поле очень сильно возрастает: в примере (1.48) — в $(L/l)^n \exp 30$ раз (принимая $l_0 = L$). Поэтому в конце этого этапа поле согласно (1.51) будет иметь фактически всего одну компоненту $\langle H_\varphi \rangle = \langle H_r(0) \rangle r T_1 \partial \omega / \partial r$. Учитывая, что у нижней гармоники первого типа осесимметричная составляющая H_φ компоненты обращается в нуль (см. (1.52)), заключаем, что усиленное поле не дает вклада в эту гармонику (и, как легко можно показать, не дает вклада вообще в любую гармонику с $k_x = 0$). Амплитуда c_2 нижней гармоники в конце первого этапа определяется проекцией усиленного поля на эту гармонику:

$$c_2 = 2\pi T_1 \left(\int_0^l r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \langle H_\varphi^{(2)} \rangle \langle H_r^{(2)} \rangle dr \right) / \left(\int \mathbf{H}^{*(2)} \mathbf{H}^{(2)} dx dy \right). \quad (1.53)$$

Звездочкой отмечено комплексное сопряжение. Интегрирование проводится по рассматриваемому объему $0 \leq x \leq a$, $y \leq b$. Знаменатель в (1.53) соответствует условию нормировки. Для гармоник первого типа выражение (1.53) обратилось бы в нуль, поскольку $\langle H_{\varphi}^{(1)} \rangle = 0$. По этой же причине проекция усиленного поля, которое в начальный момент совпадало с $\langle \mathbf{H}^{(2)} \rangle$, не дает вклада в амплитуду гармоник первого типа. Следовательно, можно считать, что в начальный момент $\mathbf{H}^{(1)} = 0$; эта гармоника и не возникнет в процессе усиления поля.

Полагаем, что в начальный момент поле описывается лишь одной гармоникой $\mathbf{H}^{(2)}$. Генерация поля будет иметь место, если числитель выражения (1.53) не обращается в нуль. Вычисление этого выражения проведем с помощью разложения по малому l (по сравнению с a , b). Достаточно ограничиться первым членом разложения по r в интегралах (1.52):

$$\begin{aligned} \langle H_r^{(2)} \rangle &= -ik_z \frac{r \text{lexp} i k_z z}{2a} \cos \frac{\pi x_0}{a} \cos \frac{\pi (y_0 - b)}{2b}, \\ \langle H_{\varphi}^{(2)} \rangle &= -ik_z \frac{\exp(i k_z z) r \pi}{4b} \sin \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi (y_0 - b)}{2b}, \\ \int_0^l r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \langle \dot{H}_{\varphi}^{(2)} \rangle \langle H_r^{(2)} \rangle dr &= \\ &= k_z^2 \frac{\omega_0 \pi^2 l^4}{40ab} \sin \frac{\pi x_0}{a} \cos \frac{\pi x_0}{a} \sin \frac{\pi (b - y_0)}{2b} \cos \frac{\pi (b - y_0)}{2b}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Здесь мы для простоты ограничились следующей моделью дифференциального вращения: $\omega(r) = \omega_0 (1 - r/l)$, $r \leq l$.

По поводу последнего выражения в (1.54) заметим следующее. Точку x_0 , y_0 нельзя располагать слишком близко к границе рассматриваемой области: в этом случае используемое разложение станет некорректным. Перейдем к выводам. Прежде всего, если $x_0 = a/2$, то последнее выражение (1.54), а значит и числитель в (1.53), обратится в нуль, и динамо невозможно. Если $x_0 > a/2$, скажем $x_0 = 3/4 a$, $y_0 = 1/2 b$ и $\omega_0 > 0$, числитель в (1.53) положителен. Это означает, что описанная выше схема работает правильно: поле генерируется экспоненциально. Если же ось цилиндра поместить в другую точку с $x_0 < a/2$, скажем в точку $x_0 = a/4$, $y_0 = b/2$ и $\omega_0 > 0$, то генерируется поле со знаком, противоположным начальному. При этом мы будем иметь знакопеременное динамо (наподобие солнечного цикла). Отметим, что в нашей модели, как это следует из выражений (1.53), (1.54), $n = 4$.

Выводы. Прежде всего, модель дифференциально вращающегося цилиндра (простейшего движения типа (1.42), (1.43)) все-таки дает генерацию поля. Это обстоятельство фактически снимает ограничения, накладываемые на антидинамо-теорему, которые так впечатляли тридцать лет назад. Интересно вернуться все-таки к одной из таких теорем. В каком случае H_z -компонента будет по-прежнему отделяться? Согласно (1.50) при $\partial/\partial t = 0$, т. е. $k_z = 0$,

H_z вновь не зависит от других компонент. И действительно, полагая в (1.54) $k_z = 0$, мы приходим к нулевой проекции на начальное поле, т. е. к отсутствию динамо.

Насколько существен сам вид и геометрия проводящей области? Если изменить форму области, изображенной на рис. 1.2, и граничные условия, будет ли возбуждаться поле? Ответ на этот вопрос в общем виде дать трудно. По-видимому, все дело в том, чтобы избежать ограничений, накладываемых динамо-теоремами. Впрочем, иногда этого недостаточно.

Пусть, в частности, дифференциально вращающийся цилиндр находится в другом проводящем цилиндре (вне большого цилиндра — вакуум). Если оси цилиндров совпадают, то импульсная модель не даст генерации поля. Действительно, как мы видели (см., в частности, (1.54)), для импульсной модели важно усиление осесимметричной составляющей поля. Такое поле будет в данном случае симметрично в целом, т. е. будет обладать осевой симметрией и по отношению к граничным условиям. Генерация такого поля исключается (см. подразд. 6). Если же ось дифференциально вращающегося цилиндра сдвинута относительно оси большого цилиндра, то генерация в принципе возможна. И действительно, по расчетам А. Гайлитиса, начальное поле $H_0 = a_1 \exp i\varphi$ после действия импульса и диссипации поворачивается на угол $\pi/2$, т. е. становится равным $a_1 \exp(i\varphi + i\pi/2)$. После двойного импульса оно повернется на угол π , т. е. просто изменит знак. Итак, двойной импульс дает знакопеременное динамо, вообще говоря, с раскачкой. Специальным подбором условий, как сказано выше, можно добиться знакопеременного динамо без раскачки. Если же во время второго импульса изменить знак ω , т. е. вращать цилиндр в обратную сторону по отношению к первому импульсу, то после двойного импульса поле опять будет пропорционально $a_1 \exp i\varphi$, и, следовательно, имеет место простая генерация.

Все же при совпадении осей цилиндров импульсная модель не дает динамо. А между тем антидинамо-теорему до сих пор никто не смог доказать! Если теперь поместить дифференциально вращающийся цилиндр в проводящий шар, то опять же можно ожидать появления динамо-решения или, как иногда говорят, динамо-неустойчивости. Для исключения тороидальной теоремы (1.42) ось цилиндра не должна проходить через центр шара. При этом в зависимости от положения оси динамо-решение будет получаться либо экспоненциально растущим, либо знакопеременным. Генерация такого типа может иметь приложения для объяснения (знакопеременного) солнечного цикла.

Рассмотренный пример генерации дифференциально вращающимся цилиндром еще раз показывает, что генерацию может вызвать практически произвольное движение. В частности, для геодинамо рассматривается полная система нелинейных уравнений МГД (см. [2]). Вопрос состоит в нахождении сил, вызывающих течение, т. е. в выяснении самой природы конвекции. Не ясно, имеется ли существенное дифференциальное вращение, гепери-

рующее тороидальное поле H_Φ (см. (1.20)). Интересно отметить, что, согласно Буссе [5], конвекция в земном ядре может принять вид валов, параллельных вектору угловой скорости. Каждый из них напоминает дифференциально вращающийся цилиндр, генерация поля поэтому согласно изложенному вполне возможна.

8. Краткое заключение

Подытожим сказанное в данной главе. Основная энергия космических электромагнитных полей сосредоточена в квазистационарных полях (током смещения можно пренебречь). Характерная частота v/l много меньше либо частоты столкновений, либо ионной циклотронной. Напряженность магнитного поля много больше электрического. Последнее можно вообще исключить из уравнений и все величины выразить через магнитное поле (уравнения МГД). Космические поля обладают огромной индуктивностью, поэтому поле заморожено в вещество.

Временное усиление поля можно достичь с помощью простых движений среды. Длительное поддержание или усиление поля при заданном поле скорости есть задача кинематического динамо. Генерация поля сопровождается уменьшением его масштаба, когда замороженность перестает иметь место.

Генерацию поля можно осуществить довольно простым полем скорости. Линейная теория, т. е. кинематическое динамо, не дает возможности определить установившееся поле, она только объясняет само существование (и, возможно, переменность) магнитного поля.

ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО КРУПНОМАСШТАБНОГО ПОЛЯ. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

1. Турбулентность космической плазмы

В этой главе мы рассмотрим динамику поля, масштаб которого L велик, а именно

$$L \gg l. \quad (2.1)$$

В предыдущей главе уже отмечалось, что модели турбулентного динамо, когда движение носит весьма сложный характер, гораздо более распространены в приложениях, чем модели ламинарного динамо — с простым профилем скорости. Это кажется странным. В действительности здесь есть несколько причин. Сформулируем их в виде некоторых утверждений.

1. Распространенность турбулентности в природе.
2. Уравнения генерации крупномасштабного поля оказываются более простыми для турбулентной среды (!) по сравнению даже с уравнением для простейшего движения.
3. Крупномасштабное поле не меняет своего масштаба в процессе генерации, поэтому эволюцию его сравнительно легко наглядно представить.
4. Для турбулентной среды проще ставить и решать нелинейную задачу на установившееся поле.

В этой главе будет проанализирована динамика крупномасштабного поля, и мы убедимся в том, что второе и третье утверждения справедливы. К четвертому мы вернемся лишь в гл. IV. Здесь мы скажем только о том, что «лежит на поверхности». Ясно, что магнитное поле, сильно отличаясь по масштабу от движений, «чувствует» это движение по каким-то грубым, усредненным характеристикам. Каким бы сложным ни было движение, оно повлияет на крупномасштабное поле только через величины типа средней энергии, среднего масштаба и т. д. Ясно, что они войдут только в виде некоторых коэффициентов в уравнения для крупномасштабных составляющих полей. Третье утверждение вполне очевидно, но мы привели его только для того, чтобы показать, что в теории крупномасштабных полей мы избегаем трудностей ламинарного динамо (см. гл. I, подразд. 5). Можно также ожидать, что и нелинейность как-то выразится в изменении полученных в линейной теории коэффициентов или появлении новых. Надо,

однако, признать, что зачастую резкое разделение масштабов (2.1) выполняется далеко не всегда в приложениях, если даже за L принимать размер самого небесного тела. Конечно, конвективные ячейки на Солнце много меньше радиуса Солнца, но размеры глубинных конвективных ячеек уже сравнимы с толщиной конвективной зоны. Именно ее толщину необходимо принять за L . Размеры межзвездных облаков сравнимы с толщиной галактического диска. Тем не менее представление о крупномасштабных полях полезно и зачастую применимо.

Что касается первого утверждения, то турбулентность связана с неустойчивостью движений с большими числами Рейнольдса. Возможно, есть и другие причины. Во всяком случае, распространенность турбулентности в природе не вызывает сомнений. Наблюдаемые движения на поверхности Солнца носят крайне нерегулярный характер. Магнитные неоднородности и движения в солнечном ветре тоже носят характер турбулентности, наложенной на сравнительно регулярное течение межпланетной плазмы (течение со скоростью ветра). Межзвездная среда находится в турбулентном движении межзвездных облаков. Конвекция в звездах носит турбулентный характер. Существование стохастического характера движений в земном ядре хотя и не доказано, тем не менее при описании движений используется концепция случайных волн.

Далее мы (практически всегда) будем иметь в виду низкочастотную турбулентность (характерная частота ниже всех плазменных частот, в частности ионной циклотронной, и ниже частоты столкновений). Приведенные примеры характеризуются такими частотами.

2. Сведения из теории турбулентности

Здесь мы изложим тот минимум, который необходим для понимания турбулентного динамо. Кроме того, часть материала, непосредственно относящаяся к нелинейной теории динамо, будет изложена в гл. IV, подразд. 3.

Гидродинамическая турбулентность. Турбулентность — существенно нелинейное явление. В то же время имеются и линейные задачи в теории турбулентности, когда необходимо выяснить динамику поля \mathbf{H} при заданном поле \mathbf{v} по уравнению (1.7) и когда определяются статистические характеристики скалярной примеси. Последняя подчиняется уравнению

$$\partial\theta/\partial t + \partial_i v_i \theta = D_\theta \Delta \theta. \quad (2.2)$$

Ни поле θ , ни магнитное поле \mathbf{H} в этом приближении не действует на движение. Поэтому турбулентность носит чисто гидродинамический характер.

Будем говорить о турбулентности, когда поле \mathbf{v} есть случайный процесс. Движение может содержать и регулярную составляющую

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{V}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (2.3)$$

u — случайная составляющая скорости. Угловые скобки означают усреднение (по пространству, времени либо по ансамблю). Регулярная составляющая, как правило, крупномасштабная, т. е. масштаб ее много больше l .

Наиболее удобный для нас пример — турбулентная конвекция. Если жидкость подогревать снизу, то наступает конвективная неустойчивость, жидкость приходит в движение, стремясь перемешаться. Так происходит, в частности, в солнечной конвективной зоне. Интенсивность возбужденного движения велика, $R \gg 1$ (см. (1.27)). Это приводит к новым неустойчивостям, в результате которых движение распадается на более мелкие пульсации. Если размер конвективных ячеек l , то размеры пульсаций меньше l . На турбулентную конвекцию может накладываться крупномасштабное движение, например вращение или дифференциальное вращение (Солнца).

В приведенном примере налицо разделение масштабов. Дифференциальное вращение определяется толщиной конвективной зоны, а l — размерами ячеек. Следует заметить, однако, что такое разделение масштабов и выделение крупномасштабной составляющей по (2.3) возможно не всегда. Так, например, турбулентность в канале за решеткой, турбулентность затопленной струи не характеризуется разделением масштабов.

Каким образом можно охарактеризовать случайную составляющую u в (2.3)? Утверждение того, что поле u есть случайный процесс, все же ограничивает реализацию u . Это не хаос. Случайный процесс характеризуется тем, что при усреднении выделяются моменты разных порядков, например второй момент (корреляционный тензор)

$$\langle u_i(x) u_j(x') \rangle = B_{ij}(x, x'), \quad (2.4)$$

третий момент

$$\langle u_i(x) u_j(x') u_f(x'') \rangle = B_{ijf}(x, x', x'')$$

и т. д.

Большой прогресс в теории турбулентности произошел после работы Колмогорова в 1941 г. [34] (теперь за рубежом ее называют теорией K41). Как сказано выше, движение масштаба l (этот масштаб называют внешним масштабом турбулентности) распадается на более мелкие вихри. Следовательно, устанавливается стационарный (в статистическом смысле) поток энергий пульсаций в область малых масштабов. Причем для стационарности необходимо, чтобы поток сохранялся, т. е. не зависел от размера пульсаций. В инерционной подобласти

$$k_1 \ll k \ll (2\pi/l), \quad k_1 = 2\pi/l_1 \quad (2.5)$$

$(2\pi/k)$ характеризует масштаб пульсаций, k — волновой вектор, l_1 — минимальный масштаб, при котором начинается действие вязкости) спектр мощности пульсаций носит универсальный характер. Прежде всего пульсации однородны (B_{ij} (2.4) зависит

лишь от $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$) и изотропны (B_{ij} конструируется лишь из двух тензоров δ_{ij} и $r_i r_j$). Взаимодействие носит локальный характер: пульсация скорости v_k (пульсация масштаба $2\pi/k$) взаимодействует в основном с соседними v_k , т. е. с пульсациями с волновыми векторами $k \geq 2\pi/l$. Время жизни $\tau(k)$ пульсации v_k из соображений размерности есть

$$\tau(k) = 1/v_k k.$$

Следовательно, сохранение потока можно записать в виде

$$\varepsilon = v_k^2 / \tau(k) = \text{const}$$

(ε не зависит от k). Итак,

$$v_k^2 = \varepsilon \tau(k) = \varepsilon (v_k k)^{-1}, \quad (2.6)$$

$$v_k = \varepsilon^{1/3} k^{-1/3}, \quad v_k^2 = \varepsilon^{2/3} k^{-2/3}.$$

На языке спектральных функций это означает следующее. Корреляционный тензор выражается через спектральную функцию (для несжимаемой жидкости $\text{div } \mathbf{v} = 0$) так:

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = 1/4\pi \int \exp(-i\mathbf{r}\mathbf{k}) \sigma_{ij}(\mathbf{k}) E(k) k^{-2} dk, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij} = 1/2 (\delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}).$$

Здесь нормировка такова, что

$$\int_0^{\infty} E(k) dk = \langle v^2 \rangle.$$

Теперь уточним величину v_k^2 :

$$v_k^2 = \int_k^{\infty} E(K') dk', \quad -dv_k^2/dk = E(k),$$

тогда из (2.6) следует

$$E(k) \sim k^{-3/2}. \quad (2.8)$$

Это так называемый спектр Колмогорова. Выпишем еще выражение для k_1 , обрезавшего спектр (2.8). Величина k_1 определяется из того, что $\tau(k_1)$ (время нелинейного взаимодействия) станет равным времени вязкой диссипации $(\chi k_1^2)^{-1}$. Или же, что то же самое, k_1 находится, если приравнять число Рейнольдса единице ($v_{k_1} (\chi k_1)^{-1} = 1$), из

$$k_1 = (\varepsilon^{1/3} \chi)^{3/4} = l^{-1} R^{3/4}. \quad (2.9)$$

При $k > k_1$ спектр $E(k)$ быстро убывает.

Сохранение потока ε связано в сущности с сохранением энергии при нелинейном взаимодействии: из (1.24) с $\chi = 0$, $\mathbf{H} = 0$ следует, что $\rho \langle v^2 \rangle / 2 = \text{const}$. Поэтому для скалярной примеси

при $D_\theta \rightarrow 0$ должно также иметь место сохранение потока. Действительно, уравнение (2.2) дает сохранение величины

$$\langle (\theta - \langle \theta \rangle)^2 \rangle = \int_0^\infty E_\theta(k) dk = - \int_0^\infty \frac{d}{dk} \theta_k^2 dk$$

(средний квадрат отклонения плотности примеси от средней плотности). Время жизни пульсации θ_k , как это видно из (2.2), как и для v_k , есть $(v_k k)^{-1}$. Поэтому для $E_\theta(k)$ тоже получается колмогоровский спектр

$$E_\theta(k) \sim k^{-5/3}. \quad (2.10)$$

3. Новейшие развития в теории турбулентности

Двумерная турбулентность. Теоретически двумерная турбулентность исследовалась давно (см. [35]), но до сравнительно недавнего времени казалась экзотической. В последнее время выяснилось, что черты двумерной турбулентности обнаруживают в характере движений в океане и атмосфере. Дрейф плазмы поперек магнитного поля тоже двумерное явление. Турбулентность в проводящей жидкости становится двумерной, если наложить на нее сильное магнитное поле. В связи с этим двумерная турбулентность стала интенсивно изучаться. Здесь, как и в предыдущем подразделе, мы изложим лишь те сведения, которые необходимы для дальнейшего изложения, отсылая интересующегося этим вопросом читателя к обзорам [36, 37].

Под двумерной турбулентностью понимают не только зависимость v от двух координат, но и плоский характер движения, т. е. v определяется из (1.43), $e = \{0, 0, 1\}$, ψ не зависит от z . Уравнение для v_x , v_y -составляющих ($v_z = 0$) можно вывести из уравнения (1.24) при $\mathbf{H} = 0$, из которого следует, что сохраняется не только средняя энергия $\rho \langle v^2 \rangle / 2$, но и так называемая энстрофия $\langle (\text{rot } v)^2 \rangle$. Поэтому каскадный перенос энергии к большим волновым числам (см. подразд. 2) здесь невозможен. В то же время перенос энстрофии не исключен. Тогда вместо (2.6), (2.8) следует писать

$$\varepsilon_\omega = k^2 v_k^2 \tau(k)^{-1} = \text{const}, \quad \tau(k) = (v_k k)^{-1}, \quad (2.11)$$

$$E(k) \sim k^{-3}.$$

Спектр (2.11) имеет место при $kl_\omega \gg 1$, $l_\omega^2 = \langle v^2 \rangle / \langle (\text{rot } v)^2 \rangle$. При $2\pi/l \ll k \ll 2\pi/l_\omega$ справедлив обычный закон пяти третей (2.8). Поток энергии направлен от малых масштабов к большим.

Критерии вырождения трехмерной турбулентности в двумерную в сильном магнитном поле как для слабопроводящей ($R'_m \ll 1$), так и для сильнопроводящей ($R'_m \gg 1$) среды выписаны в [1]. Здесь мы дадим лишь краткое резюме (для высокопроводящей

среды). Критерии могут быть получены так же, как критерии меры сжимаемости жидкости. Если источник возмущений (частота ω характерный масштаб l) удовлетворяет условию

$$\omega \ll s/l$$

(s — скорость звука), т. е. он далек от резонанса со звуком, то энергия звуковых возмущений мала по сравнению с непотенциальными (малый параметр — число Маха v/s). Если мощность источника ε (см. подразд. 2), то энергия непотенциальной составляющей есть

$$1/2 \rho v_H^2 = \rho (\varepsilon l)^{2/3}.$$

Аналогично при

$$\omega \ll v_A/l, v_A = B (4\pi\rho)^{-1/2} \quad (2.12)$$

(B — напряженность внешнего поля) турбулентность должна вырождаться в двумерную. Условие (2.12) может не выполняться, например, в солнечной короне, где источником являются волновые возмущения, идущие снизу из фотосферы. Для солнечных пятен можно принять $\omega \approx \nu l^{-1}$, если полагать, что движения возбуждаются под фотосферой (см. [1]). Тогда (2.12) выполняется. Вообще конвективная неустойчивость в не строго вертикальном (в частности, чисто горизонтальном) магнитном поле обычно подавлена. Но двумерные валы, оси которых параллельны \mathbf{B} , «не чувствуют» поле, и такая турбулентность не будет подавлена.

Следует, однако, подчеркнуть, что критерий (2.12) недостаточен: система должна обладать такими степенями свободы, которые не возмущают магнитное поле. В случае однородного \mathbf{B} такие степени свободы возбуждаются в виде двумерной турбулентности. В более сложном поле таких степеней свободы может не быть.

Турбулентность с малым числом возбужденных гармоник (странные аттракторы). Долгое время полагали, что турбулентное состояние характеризуется большим числом возбужденных степеней свободы. В подразд. 2 мы видели, что в результате каскадного процесса возбуждены все фурье-амплитуды с волновыми векторами, лежащими в инерционном интервале (2.5). Поэтому считалось, что если в системе постепенно увеличивать число R , то сначала возбуждается одна мода, затем следующая и т. д. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не возбудятся все моды, и это уже будет турбулентность. Недавние расчеты [38] показали, что уже три взаимодействующие гармоники способны дать стохастическое поведение системы. Иначе говоря, даже небольшое число степеней свободы приводит к тому, что процесс становится случайным, если не в пространстве, то во времени. Подробности можно узнать из обзоров [39, 40].

Для нас важно, что этот процесс подходит под наше определение турбулентности. Далее в гл. III, подразд. 11, мы рассмотрим такой процесс как возможный генератор магнитного поля.

Переमेжаемость. В последнее время выяснилось, что предполагаемая статистическая однородность на масштабах, меньших l (см. подразд. 2), не очень хорошо подтверждается в эксперименте. Впрочем, впервые необходимость учета неоднородности была указана Л. Д. Ландау (см. [41, 42]). Выяснилось, что вместо «гладкой» картины, когда на крупные вихри *равномерно* накладываются более мелкие, эти последние занимают лишь часть пространства крупного вихря. Это приводит к тому, что профиль скорости более или менее однороден на определенном участке, а затем с крутым градиентом переходит на новое значение. Иначе говоря, производная по пространству имеет резкие максимумы на некоторых поверхностях, вместо того чтобы средний квадрат производных скорости был равномерно распределен в пространстве (и был везде велик, ибо, как это следует из (2.8), $\langle (\text{rot } \mathbf{v})^2 \rangle \gg \langle v^2 \rangle l^{-2}$).

Сильно упрощая, можно сказать, что поле скорости есть кусочно-непрерывная функция, меняющаяся скачками на определенных поверхностях. Ситуация напоминает образование разрывов в газовой динамике. Решение уравнения Бюргерса в однородной сжимаемой среде показывает, что акустическая волна превращается в ударную. Появляются поверхности разрыва (образование пилообразного профиля скорости). Ансамбль акустических волн приведет к появлению поверхностей, расположенных случайным образом, на которых скорость меняется скачком. Аналогично и для вихревых движений. Вихрь не просто распадается на более мелкие вихри, а, эволюционируя, образует разрывы.

В теории сильной плазменной турбулентности имеется следующий подход. Сильно нелинейные решения типа солитонов известны для многих видов взаимодействий. В нулевом приближении ансамбль солитонов описывается невзаимодействующими солитонами. В следующем приближении выписывается кинетическое уравнение для слабовзаимодействующих солитонов. Этот подход дает возможность решать задачу о *сильной турбулентности*, ибо солитоны есть решения точных нелинейных уравнений без малого параметра.

Явление перемежаемости несколько напоминает эту картину. Роль солитонов играют решения для вихревых движений с разрывами. Спектральную функцию такого поля скорости определить нетрудно. Действительно, производную по скорости можно представить в виде суммы δ -функций, особенности δ -функций расположены на поверхностях. Следовательно, спектр поля $\text{rot } \mathbf{v}$ есть «белый шум» ($E_\omega = \text{const}$):

$$E(k) = \text{const}/k^2 \quad (2.13)$$

($E_\omega = k^2 E(k)$). Реальная картина, однако, сложнее. Спектр оказывается промежуточным между (2.8) и (2.13). Можно сказать, что «вихревые солитоны» сильно взаимодействуют между собой.

Мы видим, что спектр (2.13) круче спадает к большим волновым числам, чем (2.8). Это можно объяснить таким образом. Спектр

мощности определяется средними квадратами фурье-амплитуд поля скорости

$$u_i(\mathbf{k}) = \int u_i(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.14)$$

Пусть $u_i(\mathbf{x})$ меняется на масштабе $2\pi/k$, причем это изменение имеет место на большом протяжении (порядка длины l), т. е. $u_i(\mathbf{x})$ пульсирует с характерной длиной $2\pi/k$ и пульсации занимают весь объем l^3 . Тогда величина $\langle u(\mathbf{k}) u^*(\mathbf{k}) \rangle$ будет ненулевой, и она определит $E(k)$ по (2.8). Если теперь пульсации на длине $2\pi/k$ имеют прежнюю амплитуду, но занимают лишь часть пространства, то, естественно, вклад их в интеграл (2.14) уже меньше, и величина $\langle u(\mathbf{k}) u^*(\mathbf{k}) \rangle$ станет меньше. Кроме того, чем меньше по масштабу пульсации, тем меньшую долю объема l^3 они занимают. Следовательно, и спектр пульсации получится круче.

Можно показать, пользуясь такими простыми соображениями, что спектр мощности должен иметь вид

$$E(k) \sim k^{-3/s} k^{-(3-D)/3} \quad (2.15)$$

(D — так называемая размерность). Если бы вихри занимали все трехмерное пространство, то $D = 3$, и получился бы колмогоровский спектр. Если сосредоточить вихри на поверхностях, то $D = 2$, и спектр (2.13) восстанавливается. Экспериментальные данные как будто дают значение $D = 2,5$ (так называемое 2,5-мерное пространство). Время взаимодействия по-прежнему имеет вид $\tau(k) = (v_k k)^{-1}$, поэтому вместо (2.6) будем иметь

$$v_k = \varepsilon^{1/3} k^{-1/3} (kl)^{(3-D)/3}.$$

Заметим, что истинно двумерная турбулентность (спектр (2.11)) здесь не восстанавливается. Для двумерных движений соответствующее «укручение фронта» запрещено законами сохранения.

Гиротропность. Гиротропность (отсутствие отражательной инвариантности у функции распределения вероятности) тоже считалась экзотической вещью, хотя в [35] общий вид корреляционного тензора с гиротропной частью уже выписан. После работ Штеенбека, Краузе, Рэдлера [43] стало ясно, что гиротропность возникает во вращающейся среде при наличии градиента (или градиента среднеквадратичной скорости). Тогда необходимый физический псевдоскаляр можно составить так:

$$\Omega \nabla \rho \langle v^2 \rangle \quad (2.16)$$

(Ω — угловая скорость есть псевдовектор). Далее мы будем пользоваться следующими сокращениями. Отражательно инвариантную турбулентность будем называть ОНИТ. Если же псевдоскаляр (2.16) отсутствует в задаче, т. е. мы имеем дело с «обычной» турбулентностью, будем называть ее ОИТ (отражательно инвариантная турбулентность). При наличии магнитного поля можно было бы ожидать появления других псевдоскаляров (а потому и гиротропности), поскольку и \mathbf{H} есть псевдовектор. Однако маг-

нитная гидроднимика «не чувствует» псевдовекторного характера магнитного поля: последнее входит в (1.24) и (1.31) квадратично. Гиротропность плазмы проявляется лишь на частотах выше полной циклотронной, где МГД уже неприменима.

Гиротропность поля скорости проявляется в том, что величина (тоже псевдоскаляр) $\langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle$ не равна нулю и, естественно, пропорциональна физическому псевдоскаляру (2.16). Для того чтобы убедиться в этом, следует (1.24) в точке x умножить скалярно на $\operatorname{rot} \mathbf{v}(x')$, затем умножить $\mathbf{v}(x)$ скалярно на ротор уравнения (1.24) в точке x' . Полученные два уравнения сложить и усреднить. При этом следует: 1) учесть кориолисову силу во вращающейся системе координат; 2) учесть неоднородность ρ (или $\langle v^2 \rangle$); 3) возникшие третьи моменты заменить на τ -релаксирующий член (приближение Орсга [44], о котором см. подробнее в гл. IV); 4) рассмотреть установившийся режим при $t \gg \tau$. Тогда получим

$$\langle \mathbf{v}_k \operatorname{rot} \mathbf{v}_k \rangle \sim \tau \langle v^2 \rangle (1/\rho) \Omega \nabla \rho \quad (2.17)$$

(мы положили $\langle v^2 \rangle = \text{const}$ и воспользовались квазиизотропным спектральным тензором в неоднородной по плотности среде. Тензор выписан в [43]). Физически τ -релаксация означает нелинейный распад корреляции $\langle \mathbf{v}_k \operatorname{rot} \mathbf{v}_k \rangle$ (данного масштаба $2\pi/k$) за время τ и генерацию этой величины кориолисовой силой.

Определим теперь спектр гиротропности $\tilde{E}(k)$ (как в подразд. 2):

$$\begin{aligned} 1/2 \langle \mathbf{v}_k \operatorname{rot} \mathbf{v}_k \rangle &= \int_k^\infty \tilde{E}(k') dk', \\ -1/2 \frac{d}{dk} \langle \mathbf{v}_k \operatorname{rot} \mathbf{v}_k \rangle &= \tilde{E}(k). \end{aligned}$$

Для каждого волнового вектора k следует писать v_k^2 и τ в правой части (2.17). Тогда из (2.17) имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_k \operatorname{rot} \mathbf{v}_k \rangle &\sim \tau(k) v_k^2 \sim k^{-2/3}, \\ \tilde{E}(k) &\sim k^{-1/3}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Итак, основной вклад в гиротропность $\langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle$ дает внешний масштаб турбулентности l . Поэтому для оценки $\langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle$ следует подставить в (2.17) значения всех величин при $k = 2\pi/l$:

$$\langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle \approx \tau \langle v^2 \rangle (1/\rho) \Omega \nabla \rho.$$

Корреляционный тензор поля скорости имеет вид

$$B_{ij} = A(r) \delta_{ij} + B(r) r_i r_j + C(r) \varepsilon_{ijf} r_f. \quad (2.19)$$

Здесь ε_{ijf} — псевдотензор, поэтому C — псевдоскаляр, пропорциональный (2.17). Тензор B_{ij} принят в изотропном виде, т. е. A , B , C зависят только от $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, все тензоры в (2.19) не содержат выделенного направления. Отсутствие зависимости от x соответствует однородности процесса. Для того чтобы не войти в противоречие с (2.17), необходимо полагать, что $\rho^{-1} \nabla \rho =$

$= \text{const}$ (экспоненциальная по высоте стратификация; например, распределение плотности при постоянной температуре). Все же остались два избранных направления, параллельных $\nabla\rho$ и Ω , не учтенные в (2.19). Поэтому в общем случае тензор B_{ij} усложняется.

Величина $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ является инвариантом уравнения (1.24) при $\mathbf{H} = 0$, так что в немагнитном случае имеется два инварианта: энергия и гиротропность. Ситуация напоминает двумерный случай, когда сохраняется энергия и энстрофия. Сохранение гиротропности не накладывает, однако, столь сильных ограничений на перенос энергии в инерционном интервале: спектр мощности остается колмогоровским. Если бы имелся источник гиротропности вне инерционной области при $k < 2\pi/l$, то сохранение гиротропности привело бы к следующему закону:

$$\tilde{\epsilon} = \langle \mathbf{v}_k \text{ rot } \mathbf{v}_k \rangle \tau (k)^{-1} = \text{const},$$

$$\langle \mathbf{v}_k \text{ rot } \mathbf{v}_k \rangle \sim \tau (k) \sim k^{-2/3}, \quad \tilde{E}(k) \sim k^{-5/3}.$$

Но такая ситуация (крупномасштабный источник) не известна в астрофизике. Поэтому в действительности в астрофизических условиях будет иметь место спектр (2.18).

Наглядно гиротропность можно представить себе в виде винтовых траекторий частиц. При этом правый винт преобладает над левым (т. е. движение чаще происходит по правовинтовой траектории, чем по левовинтовой), или наоборот. При отсутствии гиротропности движение частицы можно представить себе следующим образом. Траектория имеет сравнительно «гладкий» вид на протяжении корреляционного времени τ , когда частица «помнит» о своем прошлом. Затем (упрощенно говоря) траектория сбивается, и скорость принимает новое значение, «не помнящее» о своем старом значении. При наличии гиротропности картина та же, но только движение на «гладком» участке носит винтовой характер. Точнее, не успевает частица слегка отклониться в винт, как она уже начинает «забывать» о своем направлении движения. Мера закручивания частицы определяется согласно (2.17) двумя параметрами: $l |\nabla\rho| \rho^{-1}$ и $l\Omega v^{-1}$ (второй есть обратное число Россби), которые в данной теории считаются малыми.

Другая интерпретация была дана в [43]: конвективные ячейки поднимаются в область понижения плотности. На расширяющееся вещество действует кориолисова сила, которая поворачивает ячейку в целом. Опускающаяся ячейка сжимается и закручивается поэтому в обратном направлении. При этом движение происходит либо только по правому, либо только по левому винту.

Моффат [3] связывает инвариант $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ с зацеплением вихрей (рис. 2.1). «Бублики» представляют собой вихревые линии. При движении число зацеплений сохраняется из-за вмерзновенности вихря в движущуюся среду. Однако для реальной гиротропной турбулентности эти зацепления и топологические свойства такого типа не характерны, поскольку время жизни всех образований невелико. Более естественно представить себе линии тока

сложными, вообще говоря, незамкнутыми кривыми, которые на корреляционной длине представляют собой слабозакрученный винт. В случае максимальной гиротропности линии тока описывают на этой длине один шаг винта. Замкнутые линии тока изображены на рис. 2.2. Здесь представлен случай, когда гиротропность максимально велика:

$$\langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle \approx v^2/l.$$

При этом силовые линии замкнуты сами на себя при обходе тороида. Связка силовых линий на поверхности представляет собой лист Мебиуса: если двигаться вдоль силовой линии по поверхности, то можно прийти на ту сторону тороида, которая видна на

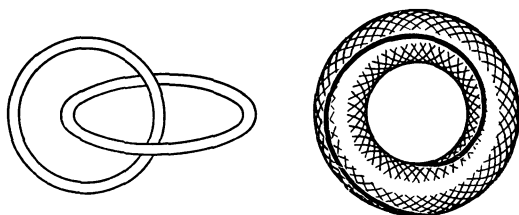


Рис. 2.1.
Топологическое зацепление вихрей

Рис. 2.2.
Реальная топология гиротропного вихря
Тороид образуется линиями тока, одна из которых изображена на поверхности

рисунке, и на обратную, вернувшись в конце концов к началу. В реальной ситуации гиротропность мала. Тогда силовые линии слегка закручены, они не замыкаются сами на себя при обходе тороида: отношение числа оборотов линий тока вдоль одной из двух окружностей, образующей тор, к числу оборотов вдоль другой есть, вообще говоря, иррациональное число.

4. Лагранжев подход

Так же как и в предыдущих подразделах, мы изложим лишь сведения, необходимые для понимания магнитной турбулентности, отсылая читателя за подробностями к монографии [42].

Ограничимся случаем несжимаемой жидкости. За основу описания берется траектория «жидкой частицы», т. е. траектория, которая определяется из решения уравнения

$$dx/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.20)$$

Поле \mathbf{v} — скорость в данной точке в данный момент времени. Это «обычная» скорость, ее теперь удобно называть «эйлеровой». Допустим, что решение (2.20) нам известно:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{a}); \quad (2.21)$$

здесь a — начальное значение x (при $t = 0$). В принципе множество решений (2.21) при разных a однозначно определяет турбулентные пульсации (или вообще движение) и ничем «не хуже» задания турбулентности в виде известного поля скорости $v(x, t)$. Для описания магнитного поля задание движения в виде (2.21) дает, как мы увидим, большие преимущества. Но большим недостатком описания (2.21) является отсутствие наглядности.

Траектория $x(t, a)$ является координатой в лагранжевом описании. Для перехода от эйлеровых координат к лагранжевым удобно пользоваться матрицей $\hat{M} = dx_i/da_j$, определитель которой (якобиан) есть

$$M = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijf} \varepsilon_{imn} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n}. \quad (2.22)$$

Обратная матрица $\hat{M}^{-1} = da_i/dx_j$ может быть записана в виде

$$\hat{M}^{-1} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{1}{M} \frac{1}{2} \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} \frac{\partial x_l}{\partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n}. \quad (2.23)$$

Следовательно, производную по x_j от f можно выразить через старые переменные a_i следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{1}{M} \frac{1}{2} \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} \frac{\partial f}{\partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n}. \quad (2.24)$$

Вычислим, пользуясь (2.24), $\text{div } v$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{1}{M} \frac{1}{2} \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n} = \\ &= \frac{1}{M} \frac{1}{6} \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} \left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n} + \frac{\partial x_j}{\partial a_i} \frac{\partial^2 x_l}{\partial t \partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial x_j}{\partial a_i} \frac{\partial x_l}{\partial a_m} \frac{\partial^2 x_f}{\partial t \partial a_n} \right) = \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В скобке (2.25) выписаны три одинаковых выражения (с учетом симметрии символов $\varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn}$). Поэтому и появился множитель $1/3$. Требование несжимаемости приведет к условию

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 0, \quad M = M(0) = 1, \quad (2.26)$$

где $M(0)$ — начальное значение M , равенство его единице видно из (2.22): при $t = 0$ $dx_i/da_f = \delta_{if}$. Выпишем также полезную формулу

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} \frac{\partial a_l}{\partial x_m} \frac{\partial a_f}{\partial x_n}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta j} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} &= \varepsilon_{imn} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_m} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_n} \end{aligned} \quad (2.27)$$

(ср. с (2.23)). Отметим, что объемные интегралы преобразуются

по правилу

$$dx = M da.$$

Для несжимаемой жидкости $dx = da$.

При лагранжевом подходе оказывается удобным описывать движение жидких частиц с помощью скалярной примеси. При этом следует в уравнении (2.2) пренебречь молекулярной диффузией, т. е. положить $D_\theta = 0$. Тогда плотность примеси будет только «следить» за движением жидкости, подчиняясь уравнению

$$d\theta/dt = \partial\theta/\partial t + v_j d_j\theta = 0 \quad (2.28)$$

($\text{div } \mathbf{v} = 0$). В частности, одну жидкую частицу, находящуюся при $t = 0$ в точке \mathbf{a} , можно описать в виде решения (2.28) с начальным условием $\theta(t = 0) = \delta(x - a)$. В лагранжевых координатах решение уравнения (2.28) выглядит совсем просто:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_0(\mathbf{a}), \quad (2.29)$$

θ_0 — начальное распределение плотности примеси (произвольная функция). Выпишем решение уравнения для магнитного поля (1.14) при $\text{div } \mathbf{v} = 0$:

$$H_i(\mathbf{x}, t) = H_j(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = H_j(\mathbf{a}) \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (2.30)$$

(при $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$ \mathbf{H} в (2.30) заменяется на \mathbf{H}_p^{-1}). Здесь и далее под величинами $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ будем подразумевать их начальное значение (при $t = 0$). Проверим, во-первых, выполнение условия $\text{div } \mathbf{H} = 0$, если в начальный момент оно выполняется. Возьмем производную $\partial/\partial x_i$ от (2.30):

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right) H_j(\mathbf{a}, 0) + \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial H_j(\mathbf{a})}{\partial a_f} \frac{\partial a_f}{\partial x_i}.$$

Второй член обращается в нуль:

$$\frac{\partial a_f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \delta_{fj},$$

а $\partial H_j(\mathbf{a})/\partial a_j = 0$ (начальное поле соленоидальное). Первый член правой части преобразуется с использованием правила (2.24)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ilf} \varepsilon_{pmn} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_j \partial a_p} \frac{\partial x_l}{\partial a_m} \frac{\partial x_f}{\partial a_n} = \frac{\partial M}{\partial t} = 0$$

(получается точно так же, как (2.25)). Итак, условию соленоидальности решение (2.30) удовлетворяет.

Для того чтобы показать, что (2.30) есть решение (1.14), выпишем последнее в форме

$$dH_i/dt = H_j \partial_j v_i. \quad (2.31)$$

Полная производная берется вдоль траекторий, т. е. \mathbf{a} фиксиро-

вано. Можно записать

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{a}=\text{const}}$$

Слева стоит эйлерова полная производная $d/dt = \partial/\partial t + v_j \partial_j$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} H_j(\mathbf{a}) \right) &= H_j(\mathbf{a}) \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = H_j(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_j \partial t} = \\ &= H_j(\mathbf{a}) \frac{\partial v_i}{\partial a_j} = H_j(\mathbf{a}) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} \frac{\partial x_f}{\partial a_j} = H_f \frac{\partial v_i}{\partial x_f}, \end{aligned}$$

что совпадает с правой частью (2.31). Здесь попутно выведена полезная формула

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial t} = \hat{\omega} \hat{M}, \quad \hat{\omega} = \frac{\partial v_i}{\partial x_f}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_f} \frac{\partial x_f}{\partial a_j}. \quad (2.32)$$

Частная производная $\partial/\partial t$ слева (2.32) берется при фиксированном \mathbf{a} .

Решение (1.45) при $D = 0$ для вектор-потенциала магнитного поля \mathbf{A} можно записать в виде

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} A_j(\mathbf{a}), \quad (2.33)$$

и такое же для градиента плотности скалярной примеси $\theta_i = \partial_i \theta$:

$$\theta_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \theta_j(\mathbf{a}). \quad (2.34)$$

В справедливости выражения (2.34) убедиться очень просто: достаточно продифференцировать (2.29) по ∂_i . Для того чтобы проверить (2.33), необходимо взять ротор от него

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imn} \partial_m A_n(\mathbf{x}, t) &= H_i(\mathbf{x}, t) = \\ &= \varepsilon_{imn} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_n} \frac{\partial A_j(\mathbf{a})}{\partial a_f} \frac{\partial a_f}{\partial x_m} + \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_n \partial x_m} A_j(\mathbf{a}) \right). \end{aligned}$$

Второй член правой части при свертке по индексам n, m с символом ε_{imn} дает нуль, а первый преобразуем с помощью второго выражения (2.27). Тогда получим

$$\varepsilon_{imn} \frac{\partial a_f}{\partial x_m} \frac{\partial a_j}{\partial x_n} \frac{\partial A_j(\mathbf{a})}{\partial a_f} = \varepsilon_{fjp} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial A_j(\mathbf{a})}{\partial a_f} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} H_j(\mathbf{a}),$$

что совпадает с правой частью (2.30).

Заметим, что (2.33), (2.34) можно записать через матрицу $\hat{M} = \partial x_i / \partial a_j$, воспользовавшись (2.23). Но тогда формулы станут более громоздкими. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Поле θ_i потенциальное, если, разумеется, в начальный момент поле $\theta_i(\mathbf{a})$ потенциально. К сожалению, нельзя утверждать

дать, что A_i — чисто вихревое поле, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, если в начальный момент оно было вихревым. Решение (2.33) автоматически генерирует потенциальную составляющую. Это обстоятельство не дает возможности строить аналогию между поведением вектор-потенциала магнитного поля и градиентом скалярной примеси. Так, в турбулентной среде $\langle \theta_i^2 \rangle$ растет со временем (см. [42]). Величина $\langle A_i^2 \rangle$ согласно (2.33) тоже растет, но не за счет ли потенциальной составляющей? В гл. III, подразд. 13 мы увидим, что аналогия между A_i и $\nabla \theta$ все же имеет под собой почву.

В заключение этого подраздела покажем в лагранжевых переменных вмерзновенность магнитного поля в вещество. Поток поля через поверхность

$$\Phi = \int_S \mathbf{H} dS = \oint_C \mathbf{A} dx.$$

Вмерзновенность означает, что поток через жидкий контур сохраняется. Покажем это. Возьмем полную производную от Φ :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} dx + \mathbf{A} \frac{dx}{dt} \right) = \oint_C \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \partial_j A_i + A_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

Мы учли, что

$$\frac{d}{dt} dx = \widehat{\omega} dx,$$

или в компонентах

$$\frac{d}{dt} dx_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j,$$

(ср. с (2.32)). При интегрировании по контуру в подынтегральное выражение можно добавлять градиент произвольной функции, поскольку $\oint \partial_i \psi dx_i = 0$. Добавим в интеграл $-\partial_i A_j v_j$, тогда

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) dx = 0.$$

Обращение в нуль $d\Phi/dt$ следует из обращения в нуль подынтегрального выражения согласно (1.45) при $D = 0$. Если в начальный момент жидкий контур находится на поверхности проводящего тела (жидкого ядра Земли, например), то он там и останется при любом движении внутри тела. Силовые линии поля, пересекающие часть поверхности внутри контура, не смогут уйти с поверхности тела. В работе Хайда [45] используется это свойство идеально проводящей среды для предсказания поверхностных свойств магнитных полей планет.

5. Лагранжево описание статистических характеристик

Введем функцию распределения

$$p_1(x | a, t)$$

— плотность вероятности того, что жидкая частица находится в точке x при условии, что при $t = 0$ она находилась в точке a . Очевидно, что

$$\int p_1(x | a, t) da = 1$$

(плотность вероятности того, что частица находится в точке x , есть единица).

Умножим (2.29) на $p_1(x | a, t)$ и проинтегрируем по a , тогда

$$\begin{aligned} \langle \theta(x, t) \rangle &= \int \theta(x | a, t) p_1(x | a, t) da = \\ &= \int p_1(x | a, t) \theta(a) da. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В левой части (2.35) появилось усреднение по ансамблю траекторий, приведших частицу из точки a в точку x . При усреднении считалось, что начальное $\theta_0(a)$ для всего ансамбля одинаково. Проведем теперь вторичное усреднение по ансамблю полей $\theta(a)$. Пусть этот ансамбль (при $t = 0$) статистически независим от лагранжевых (или эйлеровых) характеристик поля скорости при $t \geq 0$. Тогда вместо (2.35) имеем

$$\langle \theta(x, t) \rangle = \int p_1(x | a, t) \langle \theta(a) \rangle da. \quad (2.36)$$

Это выражение при $t \ll \tau$ (τ — время корреляции пульсаций) не представляет интереса. Дело в том, что при $t = 0$ предполагалась статистическая независимость полей $\theta(a)$ и v . Это сильное предположение! Ведь поле v взаимодействует с θ , что следует непосредственно из (2.28). При $t \gg \tau$ система уже забудет о своем начальном значении, поскольку τ имеет смысл «времени памяти» системы. Статистические свойства выйдут при $t \gg \tau$ на универсальный режим.

Итак, зная функцию распределения $p_1(x | a, t)$, можно определить значение $\langle \theta(x, t) \rangle$ при известном $\langle \theta(a) \rangle$. Возможно ли обратное: определить p_1 при известном $\langle \theta(x, t) \rangle$ как функционал от $\langle \theta(a) \rangle$? Оказывается, можно. Пусть

$$\langle \theta(x, t) \rangle = \int G(x, a, t) \langle \theta(a) \rangle da. \quad (2.37)$$

Тогда выражение для p_1 получится, если подставить вместо $\langle \theta(a) \rangle$ δ -функцию от $a - a'$ (a' фиксировано):

$$p_1(x | a, t) = G(x, a, t). \quad (2.38)$$

Учтем однородность турбулентности, и это приведет к тому, что $p_1(x | a, t)$ упрощается: она зависит только от $x - a$ и t :

$$p_1 = p_1(x - a, t).$$

Тогда (2.36) запишется в фурье-представлении в простом виде:

$$\langle \theta(\mathbf{k}, t) \rangle = p_1(\mathbf{k}, t) \langle \theta(\mathbf{k}, 0) \rangle, \quad (2.39)$$

$p_1(\mathbf{k}, t)$ — характеристическая функция. Примем теперь во внимание *стационарность* турбулентности. Это означает, что отсчет времени от $t = 0$ можно сдвигать:

$$\begin{aligned} \langle \theta(t + t_1) \rangle &= p_1(t + t_1) \langle \theta(0) \rangle = p_1(t_1) \langle \theta(t) \rangle = \\ &= p_1(t_1) p_1(t) \theta(0). \end{aligned}$$

Здесь мы для простоты не выписали зависимость всех входящих сюда функций от \mathbf{k} , $t_1 \gg \tau$. Итак, при $t_1, t \gg \tau$ функция $p_1(\mathbf{k}, t)$ должна удовлетворять условию

$$p_1(\mathbf{k}, t_1) p_1(\mathbf{k}, t) = p_1(\mathbf{k}, t + t_1). \quad (2.40)$$

Единственная функция, удовлетворяющая (столь сильному) условию (2.40) при произвольных t, t_1 , есть экспонента

$$p_1(k, t) = N(k) \exp K(k) t. \quad (2.41)$$

Для дальнейшего важно, что уравнение для $p_1(\xi, t)$, $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, имеет вид

$$\partial p_1 / \partial t = \int K(\xi - y) p_1(y) dy, \quad (2.42)$$

причем ядро интегрального уравнения K не зависит от t (напомним, это справедливо при $t \gg \tau$!).

Беря производную по t от (2.36), получим при учете (2.42)

$$\frac{\partial \langle \theta(\mathbf{x}, t) \rangle}{\partial t} = \int K(\mathbf{x} - y) \langle \theta(\mathbf{y}, t) \rangle dy. \quad (2.43)$$

Следует подчеркнуть, что (2.42) и (2.43) физически различны. Как сказано, (2.42), как и (2.41), несправедливо при $t < \tau$. Но в этих выражениях t отсчитывается от момента, когда точки \mathbf{x} и \mathbf{a} совпадали, т. е. момент $t = 0$ особый. Уравнение же (2.43) для скалярной примеси не содержит информации о начальном положении частиц. Оно, конечно, было выведено для асимптотического случая $t \gg \tau$. Уравнение можно решить, задавая *начальные* данные $\langle \theta(\mathbf{x}, t_0) \rangle$ при $t = t_0$, $t_0 \gg \tau$. Решение при этом будет действительным при $t > t_0$, $t - t_0 < \tau$. Этого нельзя делать с (2.42) для p_1 : при известном $p_1(t_0)$ уравнение (2.42) справедливо лишь при $t > t_0$, $t - t_0 \gg \tau$.

Решение (2.43) при заданном $\langle \theta(\mathbf{x}, t) \rangle$ при $t = t_0$ для $t > t_0$ имеет в фурье-представлении вид

$$\langle \theta(\mathbf{k}, t) \rangle = \langle \theta(\mathbf{k}, t_0) \rangle \exp K(k)(t - t_0). \quad (2.44)$$

При этом имеем в виду, что ядро $K(\mathbf{x} - y)$ в (2.43) характеризует турбулентность и существенно меняется поэтому на внешнем масштабе l . В то же время усреднение θ означает, что это крупномасштабная функция, т. е. меняется медленно на масштабе l . На языке фурье-представления это означает, что $k \ll 2\pi/l$ и $K(k)$

меняется существенно при $k \approx 2\pi/l$. Следовательно, $K(k)$ можно раскладывать при малых k (более конкретно, $k \ll 2\pi/l$):

$$K(k) = -D_T k^2. \quad (2.45)$$

В этом разложении мы ограничились квадратичным членом. Член нулевого порядка не возникает, поскольку при $k \rightarrow 0$ величина $\langle \theta(0, t) \rangle$ (представляющая однородную составляющую скалярной примеси) не должна эволюционировать. Действительно, согласно основному уравнению (2.28) однородная величина θ , т. е. не зависящая от x , не зависит также и от времени. Член первого порядка по k не возникает в этом разложении: для изотропной турбулентности функция $K(k)$ четна по k .

Крупномасштабная примесь ведет себя согласно (2.44) с учетом (2.45) в x -представлении

$$\partial \langle \theta \rangle / \partial t = D_T \Delta \langle \theta \rangle. \quad (2.46)$$

Это есть уравнение диффузии, уже давно известное в теории турбулентности [42]. Проблема состояла лишь в том, чтобы выразить коэффициент диффузии D_T через эйлеровы характеристики скорости (вопрос этот мы пока не затрагиваем). Положительная определенность коэффициента D_T в (2.45) следует вот из каких соображений. При $t \rightarrow \infty$ (точнее, $t \gg \tau$) функция $p_1(\xi, t)$ должна стремиться к нулю: за большой промежуток времени частица уходит очень далеко от своего начального положения. Плотность вероятности поэтому «размазывается» по большому объему. Будучи нормированной на единицу, она при этом должна убывать по амплитуде. Итак, $p_1(\xi, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, следовательно, $p_1(k, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и согласно (2.44) $K(k)$ должно быть отрицательным, как в (2.45) с $D_T > 0$.

Для нас весьма существенным является независимость ядра K интегрального уравнения (2.43) от t (в универсальном режиме $t \gg \tau$). Для дальнейшего методически полезно показать это непосредственно из общего соотношения (2.37), которое является, собственно говоря, определением. Для стационарного в статистическом смысле процесса возможен сдвиг начала отсчета времени:

$$\begin{aligned} \langle \theta(x, t + t_1) \rangle &= \int G(x, a, t + t_1) \langle \theta(a) \rangle da = \\ &= \int G(x, y, t) \langle \theta(y, t_1) \rangle dy = \\ &= \int G(x, y, t) G(y, a, t_1) \langle \theta(a) \rangle dy da, \\ \int G'(x, y, t) G(y, a, t_1) dy &= G(x, a, t + t_1). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Соотношение (2.47) справедливо при любом t . Полагая t малым, разложим последнее выражение в (2.47) по малым t . Учитывая, что, по определению (2.37), $G(x, a, 0) = \delta(x - a)$, имеем

$$\int K(x, y) G(y, a, t) dy = \frac{\partial}{\partial t} G(x, a, t), \quad K = \left. \frac{\partial G}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (2.48)$$

Продифференцируем (2.37) по t и подставим в полученное выраже-

ние $\partial G/\partial t$ по (2.48), тогда получим (2.43), где дополнительно учтена однородность турбулентности (зависимость K только от $x - y$). Существенно, что K в (2.48) не зависит от времени.

6. Лагранжевы статистические характеристики двух жидких частиц

В предыдущем подразделе мы подробно рассматривали свойства одноточечной функции распределения $p_1(x | a, t)$. Это дает нам возможность без труда изложить обобщение на двухточечную функцию распределения $p_2({}^1x, {}^2x | {}^1a, {}^2a, t) = p_2({}^\alpha x | {}^\beta a, t)$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — плотность вероятности того, что две частицы находятся в точках ${}^\alpha x$ при условии, что в момент $t = 0$ они находились в ${}^\beta a$. Точнее, при $t = 0$ ${}^1x = {}^1a, {}^2x = {}^2a$. Сопоставим свойства этой функции со свойствами скалярной примеси. Аналогично подразд. 5 (см. (2.36)) показываем, что при $t \gg \tau$

$$\begin{aligned} \Theta({}^\alpha x) &= \langle \theta({}^1x, t) \theta({}^2x, t) \rangle = \\ &= \int p_2({}^1x, {}^2x | {}^1a, {}^2a, t) \langle \theta({}^1a) \theta({}^2a) \rangle da \end{aligned} \quad (2.49)$$

(здесь считается, что $\langle \theta \rangle = 0$). Так определяется корреляционная функция пульсаций Θ в момент t при известной начальной θ — через функцию p_2 . Если, наоборот, нам известно решение $\Theta({}^\alpha x)$, то, подобно (2.37), (2.38), функция p_2 совпадает с этим решением с заданным начальным значением $\Theta({}^\alpha a) = \delta({}^1a - {}^1a') \delta({}^2a - {}^2a')$. Уравнение для $\Theta({}^\alpha x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Theta({}^\alpha x) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \theta({}^1x, t) \theta({}^2x, t) \rangle = \\ &= \int K({}^1x, {}^2x; {}^1y, {}^2y) \langle \theta({}^1y, t) \theta({}^2y, t) \rangle d{}^1y d{}^2y. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Это уравнение выводится дифференцированием двумерного аналога (2.37) с использованием свойств стационарности турбулентности так, как в соотношениях (2.47), (2.48). Ядро K , так же как в (2.43), не зависит от времени. Уравнение (2.50) можно решать с начальными данными при $t = t_0 \gg \tau$. Оно совпадает с уравнением для $p_2({}^\alpha x | {}^\beta a, t)$ при $t \gg \tau$. При этом функцию $\Theta({}^\alpha x, t_0)$ можно задавать практически произвольной (лишь бы эта функция удовлетворяла требованиям, налагаемым на корреляционную функцию), в то время как $p_2({}^\alpha x | {}^\beta a, t_0)$ не известна и не может быть произвольно задана. Для однородной турбулентности с однородной начальной Θ (т. е. зависящей лишь от разности пространственных аргументов) K зависит только от трех аргументов: ${}^1x - {}^1y, {}^2x - {}^2y, {}^2y - {}^1y$. Делая замену переменных: ${}^2y - {}^1y = -y', {}^1x - {}^1y = -y'', {}^1y = -y'' + {}^1x, {}^2y = y' - y'' + {}^1x$, получим вместо (2.50)

$$\begin{aligned} \partial \Theta(r) / \partial t &= \int K(r - r', r') \Theta(r') dr', \\ r &= {}^2x - {}^1x, r' = y'' - y'. \end{aligned}$$

Все соотношения предыдущего подраздела мы обобщили на двухточечную функцию распределения. Разложение типа (2.45) и переход к диффузионному уравнению типа (2.46) здесь уже невозможны. Нельзя считать, что $k \ll 2\pi/l$. Напротив, все функции, в том числе и Θ , быстро меняются на длине l , т. е. не являются крупномасштабными. Поэтому, казалось бы, получить уравнение для p_2 и Θ проще, чем (2.50), нет возможности. На самом деле на p_2 накладываются столь жесткие условия, что вид уравнения можно упростить.

Прежде чем это делать, сформулируем задачу для усредненного магнитного поля, тесно связанную с двухточечной функцией распределения. Прежде всего ясно, что решение (2.30) можно переписать в виде

$$H_i({}^1\mathbf{x}, t) = \lim_{{}^2\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a}} [({}^2x_i - {}^1x_i)/({}^2a_j - {}^1a_j)] H_j({}^1\mathbf{a}), \quad (2.51)$$

где ${}^1\mathbf{x}$, ${}^2\mathbf{x}$ — координаты жидких частиц, вышедших из точек ${}^1\mathbf{a}$, ${}^2\mathbf{a}$ в момент $t = 0$. Умножим (2.51) на $p_2({}^\alpha\mathbf{x} | {}^\beta\mathbf{a}, t)$ и проинтегрируем по ${}^1\mathbf{a}$ и ${}^2\mathbf{x}$:

$$B_i = \langle H_i({}^1\mathbf{x}, t) \rangle = \int \lim_{{}^2\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a}} [({}^2x_i - {}^1x_i)/({}^2a_j - {}^1a_j)] \times \\ \times \langle H_j({}^1\mathbf{a}) \rangle p_2({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x} | {}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}, t) d{}^1\mathbf{a} d{}^2\mathbf{x}. \quad (2.52)$$

В отличие от (2.35) мы имеем сразу два усреднения: по траекториям частиц, пришедших в точку ${}^1\mathbf{x}$, и по близким к ним новым траекториям частиц, вышедших из точки ${}^2\mathbf{a}$ (близкой к ${}^1\mathbf{a}$). Здесь также проведено усреднение по начальному распределению $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ (чтобы не писать два выражения типа (2.35) и (2.36), мы выписали окончательное). Выражение (2.52) справедливо при $t \gg \tau$.

Итак, статистические характеристики магнитного поля оказываются связанными с функцией p_2 , а через нее — со статистическими характеристиками скалярной примеси. Действительно, динамика p_2 полностью определяется при $t \gg \tau$ уравнением для скалярной примеси (2.50). Следовательно, имеется экспериментальная возможность выяснить средние характеристики для магнитного поля, т. е. для вычисления *первого* момента: определять динамику корреляционной функции скалярной примеси, а значит, экспериментально измерять *второй* момент для скалярной примеси.

7. Уравнение для крупномасштабного магнитного поля

До сих пор мы излагали формальные вещи, необходимость которых не была ясна. И действительно, точное решение (2.30) было известно уже довольно давно. Можно вводить также усреднение этого решения по каким-то формальным лагранжевым характеристикам. Но ввиду сложности лагранжевых переменных пользы от точного решения, как казалось, было мало. Действи-

тельно, лагранжевы координаты существенно не прямолинейные (и даже не ортогональные). А в турбулентной среде оси координат — запутанные кривые линии, к тому же меняющиеся со временем! Ситуация здесь напоминает проблему n тел: общее решение в виде пертурбационного ряда можно всегда выписать, но пользы в нем мало, так как ряд слишком сложен.

Все стало иначе после появления работы Крейкнана [7], который показал, что усреднение лагранжевых характеристик может дать строго выведенное уравнение для среднего магнитного поля. Почему же необходимо развить столь сложный аппарат для вывода этого уравнения? Если исходить непосредственно из (1.7), то его прямое усреднение дает связь между первым моментом $\langle \mathbf{H} \rangle$ и вторым $\langle [\mathbf{v}\mathbf{H}] \rangle$. Умножив (1.7) на v_j , получим связь между вторым моментом и третьим $\langle v_i v_j H_k \rangle$ и т. д. Иначе говоря, здесь возникает обычная для теории турбулентности проблема замыкания цепочки уравнений для моментов. Строгое решение возможно при наличии малого параметра и было получено в двух случаях: 1) $R'_m \ll 1$, 2) $\varepsilon = (\tau v/l) \ll 1$. Решение ищется в виде $\mathbf{H} = \mathbf{V} + \mathbf{h}$, $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{V}$. В первом случае \mathbf{h} просто мал по сравнению с \mathbf{V} , и разложение по малому параметру R'_m эквивалентно разложению по степеням hB^{-1} . Для нахождения корреляции $\langle [\mathbf{v}\mathbf{H}] \rangle = \langle [\mathbf{v}\mathbf{h}] \rangle$ достаточно в этом случае воспользоваться линейризованным (по параметру R'_m или hB^{-1}) уравнением (1.7) $\partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}] + D\Delta \mathbf{h}$.

Решение \mathbf{h} этого уравнения подставляется в $\langle [\mathbf{v}\mathbf{h}] \rangle$ и получается уравнение для \mathbf{V} [43]. Во втором случае уравнение (1.7) переписывается в интегральном виде $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \int G \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] d\mathbf{x}' dt'$ (G — функция Грина уравнения (1.7) с $\mathbf{v} = 0$) и раскладывается в ряд теории возмущений. Фактически эта процедура есть разложение по степеням ε . Интерес при этом представляет случай $R'_m \gg \gg 1$ (но $\varepsilon \ll 1$). Пертурбационный ряд, в котором \mathbf{H} выражается через начальное поле, усредняется почленно, и $\mathbf{H}(t \rightarrow 0)$ принимается нескоррелированным с полем скорости. При $t \gg \tau$ система уже забудет эту нескоррелированность, и можно получить универсальное уравнение для \mathbf{V} . Ряд можно просуммировать в точном виде при $\tau \rightarrow 0$ [46]. Отметим, что здесь уже hB^{-1} не является малым параметром, что послужило предметом целого ряда дискуссий и «критики» высокопроводящего предела: $R'_m \gg 1$. В общем-то беспредметной дискуссии, ибо при $\varepsilon \ll 1$ процесс \mathbf{v} представляет собой белый шум, \mathbf{H} — марковский процесс (уравнение (1.7) — аналог уравнения Ланжевена). Но для марковского процесса процедура усреднения строго обоснована. По существу \mathbf{h} не мало само по себе, но слабо возмущается за время τ , причем поле \mathbf{v} уже существенно изменилось и забыло свои начальные данные.

Все же для реальной турбулентности ε не мало, как мы видели в подразд. 1: $\varepsilon \approx 1$. Как быть в этом случае? Была разработана процедура последовательных приближений по параметру ε , которую, по всей вероятности, можно «протянуть» до $\varepsilon = 1$ (см. [47]).

Но именно «по всей вероятности». Строго обосновать применимость процедуры при $\varepsilon = 1$ не удастся. Это обстоятельство тоже породило скепсис у ряда авторов по отношению к высокопроводящему пределу $R'_m \gg 1$ (который только и имеет место для космической плазмы!).

В упомянутой работе Крейкнана [7] фактически использовалось разложение решения по малому параметру LL^{-1} (наподобие разложения (2.45)), который действительно мал при наличии крупномасштабного поля, изменяющегося на размере L . Мы изложим эти результаты, но в модифицированном виде. Модификация будет заключаться в том, что изложение будет вестись в виде, более общем, чем это необходимо для понимания динамики крупномасштабных полей. Благодаря этому мы сможем пользоваться в гл. III результатами этого подраздела.

Уточнение вида уравнения для функции распределения. Общий вид (2.50) для p_2 при $t \gg \tau$ содержит слишком много неизвестных функций. Воспользуемся прежде всего тем обстоятельством, что (2.28) (впрочем, как и (2.2)) — уравнение в частных производных. Производная по времени от θ в точке x пропорциональна величине θ в близких точках. Более точно, пропорциональна пространственной производной (первой или второй, как в (2.2)) в этой же точке x . Это же свойство локальности должно выполняться для усредненных характеристик θ , т. е. для корреляционной функции Θ . Производная от $\Theta(x^1, x^2)$ по времени не может зависеть от значений Θ в далеких от x^1, x^2 точках. Она должна зависеть от значений Θ в близких от x^1, x^2 точках, точнее, от пространственных производных в этих точках. Поскольку (2.50), как сказано выше, есть одновременно и уравнение для p_2 , то такое же утверждение о «близкодействии» относится к p_2 . Иначе говоря, ядро в правой части раскладывается по δ -функциям.

Разумеется уравнение для одноточечной функции распределения, которое получается интегрированием двухточечной:

$$p_1(x | a, t) = \int p_2(x, x^2 | a, a^2, t) d^2x,$$

тоже должно быть дифференциальным:

$$\partial p_1 / \partial t = \partial_i b_i p_1 + \partial_i \partial_j b_{ij} p_1 + \dots \quad (2.53)$$

Уравнение (2.53) выписано в дивергентной форме, т. е. так, чтобы сохранялся интеграл $\int p_1 dx = 1$ (в сущности, это аналог теоремы Лиувилля). Для однородной изотропной турбулентности p_1 зависит лишь от $|x - a|$, в то время как коэффициенты b_i, b_{ij} в (2.53) должны зависеть лишь от x . Дело в том, что в (2.43), совпадающем с уравнением для p_1 , нет никакой зависимости от a . Чтобы не войти в противоречие с условием однородности, необходимо считать, что $b_i = \text{const}$, $b_{ij} = \text{const}$. Но в рассматриваемом случае турбулентность не содержит избранного направления

и $b_i = 0$, а $b_{ij} = D_T \delta_{ij}$. Отсюда получаем

$$\partial p_1 / \partial t = D_T \Delta p_1 + \dots \quad (2.54)$$

(ср. с (2.46)).

Перейдем к уравнению для двухточечной функции распределения p_2

$$\partial p_2 / \partial t = {}^\alpha \partial_i^\alpha b_i p_2 + {}^\alpha \partial_i^\beta \partial_j^{\alpha\beta} b_{ij} p_2 + \dots \quad (2.55)$$

по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2$ суммируется, ${}^\alpha \partial_i$ действует только на ${}^\alpha x$. Это уравнение тоже необходимо выписывать в дивергентной форме, иначе при интегрировании по 2x не получится (2.53). Коэффициенты b здесь зависят только от 1x , 2x (так же как в (2.53), коэффициенты зависят лишь от x). Более того; поскольку (2.55) есть одновременно уравнение на Θ , коэффициенты в однородной турбулентности должны зависеть лишь от $r = {}^2x - {}^1x$. Функции в (2.55) могут быть расписаны как сумма по греческим индексам. Рассмотрим, в частности, член ($\alpha = 1, \beta = 1$) ${}^1 \partial_i {}^1 \partial_j {}^{11} b_{ij} p_2$. Все другие обязательно содержат ${}^2 \partial_i$. Поэтому при интегрировании по 2x они исчезнут. Теперь выражение (2.54) получится только в том случае, если ${}^{11} b_{ij}$ не зависят от r , а есть константы ${}^{11} b_{ij} = D_T \delta_{ij}$. В противном случае интегрирование по 2x даст справа интеграл $\int {}^{11} b_{ij} p_2 d^2x \neq {}^{11} b_{ij} \int p_2 d^2x = {}^{11} b_{ij} p_1$ вместо (2.54). Аналогично ${}^{22} b_{ij} = D_T \delta_{ij}$.

Теперь мы имеем дело с пространством, двумерным по греческим индексам и трехмерным по латинским. Единственный избранный вектор в этом (все еще изотропном!) пространстве есть ${}^\alpha x_i$, поэтому ${}^\alpha b_i = A {}^\alpha x_i$. Но при любом A величина ${}^\alpha b_i$ в таком виде зависит не только от ${}^2x - {}^1x$, но и от 1x и 2x по отдельности. Следовательно, $A = 0$, и все коэффициенты ${}^\alpha b_i$ равны нулю. Общий вид второго тензора в (2.55)

$${}^{\alpha\beta} b_{ij} = {}^{\alpha\beta} A(r) \delta_{ij} + {}^{\alpha\beta} B(r) r_i r_j + {}^{\alpha\beta} C(r) \varepsilon_{ijf} r_f, \quad (2.56)$$

$${}^{11} A(r) = {}^{22} A(r) = D_T = \text{const}, \quad {}^{11} B = {}^{22} B = 0, \quad {}^{11} C = {}^{22} C = 0.$$

Воспользуемся эрмитовостью оператора в правой части (2.55), которую можно обосновать следующим образом. Уравнение для $\tilde{\theta}$ (2.2) и уравнение для сопряженной функции

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\theta} - \partial_j v_j \tilde{\theta} = D_\theta \Delta \tilde{\theta} \quad (2.57)$$

отличаются. Рассмотрим наряду с нашей турбулентностью другую, которая определяется следующим образом:

$$v_1(x) = -v(x), \quad (2.58)$$

v_1 — поле скорости в новой турбулентности. Тогда в новом поле скорости уравнение для $\tilde{\theta}$ совпадает с (2.2). Ясно, что все статистические характеристики при таком преобразовании не изменятся. Даже псевдоскаляр $\langle v \text{ rot } v \rangle$ останется неизменным. Следовательно, хотя уравнение (2.2) не является эрмитовым, уравнение для

$\langle \theta(\mathbf{x}) \tilde{\theta}_1(\mathbf{x}') \rangle$ ($\tilde{\theta}_1$ определено в новой турбулентности, но с теми же начальными данными, что и у функции θ) будет самосопряженным. Ввиду инвариантности турбулентности (в статистическом смысле) по отношению к преобразованию (2.58), уравнение для $\langle \theta(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}') \rangle = \Theta$ (а значит, и (2.55)) тоже будет эрмитовым. В частности, для марковской модели этот оператор эрмитов.

Требования эрмитовости выполняются, если потребовать, чтобы функции в (2.55) удовлетворяли условию

$$\alpha \partial_i^\beta \partial_j^\alpha b_{ij} = {}^1 \partial_i {}^2 \partial_j {}^{12} b_{ij} + {}^2 \partial_i {}^1 \partial_j {}^{21} b_{ij} = 0. \quad (2.59)$$

Из очевидной симметрии точек ${}^1 \mathbf{x}$, ${}^2 \mathbf{x}$ следует ${}^{12} b_{ij} = {}^{21} b_{ij}$. Воспользуемся, наконец, свойством скалярной примеси

$$\langle \theta({}^1 \mathbf{x}) \theta({}^2 \mathbf{x}) \rangle |_{{}^2 \mathbf{x} = {}^1 \mathbf{x}} = \text{const}, \quad (2.60)$$

которое следует непосредственно из (2.28). Свойство (2.60) означает, что (2.55), выписанное для Θ , должно справа обращаться в нуль при ${}^1 \mathbf{x} = {}^2 \mathbf{x}$. Заметим, что свойству (2.60) соответствует очевидное требование, накладываемое на p_2 : $p_2 |_{{}^2 \mathbf{x} = {}^1 \mathbf{x}} = 0$, если ${}^2 \mathbf{a} \neq {}^1 \mathbf{a}$. Дело в том, что две жидкие частицы, вышедшие из разных точек, не могут (в несжимаемой среде) слиться в одну. Требование (2.60) приводит (с учетом (2.59)) к

$$\begin{aligned} \alpha^\beta b_{ij}(0) \alpha \partial_i^\beta \partial_j p_2 &= \alpha^\beta A_{ij}(0) \alpha \partial_i^\beta \partial_j p_2 = \alpha^\beta T \delta_{ij}^\alpha \partial_i^\beta \partial_j p_2 = \\ &= \alpha^\beta T \alpha \partial_i^\beta \partial_i p_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Свойство (2.60) (а значит, и (2.61)) проще всего принять во внимание, если выписать (2.55) для однородной и изотропной скалярной примеси $\Theta = \Theta(r)$ (для последнего случая, в частности, применимо уравнение (2.55)!). Тогда будем иметь равенство ${}^2 \partial_i = -{}^1 \partial_i$. Выпишем это уравнение:

$$\partial \Theta / \partial t = 2 D_T \Delta \Theta - 2 T_{ij}(r) d_i \partial_j \Theta, \quad (2.62)$$

$T_{ij}(r) = {}^{12} b_{ij} = {}^{21} b_{ij}$. Производные ∂_i действуют либо на ${}^2 \mathbf{x}$, либо на ${}^1 \mathbf{x}$ — безразлично. Требование обращения в нуль правой части при $r = 0$ записывается в виде $T_{ij}(0) = D_T$. Учитывая сказанное выше, выпишем уравнение для p_2 в компактном виде:

$$\begin{aligned} \partial F_2 / \partial t &= \sum_{\alpha, \beta} T_{ij} (\alpha \mathbf{x} - \beta \mathbf{x})^\alpha \partial_i^\beta \partial_j p_2 + \dots, \\ \alpha \partial_i T_{ij} &= \beta \partial_j T_{ij} = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

или

$$\begin{aligned} \partial p_2 / \partial t &= T ({}^{11} \Delta + {}^{22} \Delta) p_2 + T_{ij} ({}^1 \mathbf{x} - {}^2 \mathbf{x}) {}^1 \partial_i {}^2 \partial_j p_2 + \\ &+ T_{ij} ({}^2 \mathbf{x} - {}^1 \mathbf{x}) {}^2 \partial_i {}^1 \partial_j p_2 + \dots, \quad T \delta_{ij} = T_{ij}(0). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Вывод уравнения для крупномасштабного магнитного поля. Из точного выражения (2.52) видно, что в сущности для определения B_i необходимо знать поведение p_2 в очень близких точках (точка ${}^1 \mathbf{x}$ близка к ${}^2 \mathbf{x}$). Следовательно, вектор $\mathbf{r} = {}^2 \mathbf{x} - {}^1 \mathbf{x}$ должен быть мал. Но что значит мал? Очевидно, по сравнению с любыми

масштабами в турбулентности, для которых еще существенно изменение скорости. Стало быть, можно раскладывать T_{ij} в (2.64) при малых r , поскольку именно этот тензор характеризует турбулентность.

Ограничимся самыми низшими членами по r :

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = T\delta_{ij} + C(0)\varepsilon_{ijf}r_f \quad (2.65)$$

(см. (2.56), естественно, ${}^{12}C(0) = {}^{21}C(0) = C(0)$). Разложение (2.65) эквивалентно разложению Крейкнана [7] по параметру l/L . Следовательно, вместо (2.64) можно записать

$$\begin{aligned} \partial p_2 / \partial t = & T({}^{11}\Delta + 2{}^1\partial_i{}^2\partial_j + {}^{22}\Delta)p_2 + C(0)\varepsilon_{ijf}r_f{}^2\partial_i{}^1\partial_j p_2 - \\ & - C(0)\varepsilon_{ijf}r_f{}^1\partial_i{}^2\partial_j p_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

Теперь у нас есть все для вывода уравнения для \mathbf{V} . С этой целью возьмем производную по t от (2.52) и подставим выражение $\partial p_2 / \partial t$ согласно (2.66). Далее все выражения с входящим оператором ${}^2\partial_j$ интегрируем по ${}^2\mathbf{x}$. При этом действие этого оператора переходит на 1x_i , стоящее перед p_2 в (2.52). Затем приводим это выражение к виду, в котором оператор ${}^1\partial_i$ действует на все выражение правой части (2.52).

В результате простых, но громоздких выкладок, где особое внимание необходимо уделить гиротропной части с $C(0)\varepsilon_{ijf}r_f$ (здесь необходимо быть внимательным к знакам), получим

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = D_T \Delta \mathbf{V} + \alpha \operatorname{rot} \mathbf{V} + \dots, \quad (2.67)$$

$\alpha = -2C(0)$. Это — известное уравнение, полученное разными авторами. Его называют уравнением генерации крупномасштабного поля.

Отметим, что формально у нас еще может оставаться опасение, что следующие члены разложения T_{ij} , кроме выписанных в (2.65), могут дать какой-то вклад. Оказывается, они все сокращаются или обращаются в нуль. Для того чтобы убедиться в этом, следует пользоваться свойством

$$\lim_{{}^2\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a}} \int d^2\mathbf{x} \frac{({}^2x_f - {}^1x_f)({}^2x_i - {}^1x_i)}{{}^2a_m - {}^1a_m} p_2 = 0, \quad (2.68)$$

которое следует из того, что p_2 ведет себя как $p' \delta({}^1\mathbf{x} - {}^2\mathbf{x})$ при ${}^2\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a}$, p' — функция без особенностей. Заменяя δ -функцию на любую ее аппроксимацию с параметром ${}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a}$, например

$$\delta = [\pi({}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a})^2]^{-3/2} \exp[-({}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x})^2({}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a})^{-2}],$$

убеждаемся в справедливости (2.68). При вычислении правой части (2.52) с p_2 , взятом из общего уравнения (2.64), возникнут дополнительные к описанным выше) члены типа ${}^1\partial_i \int d^2\mathbf{x} p_2 T_{ij}({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}) / ({}^2a_m - {}^1a_m)$, для вычисления которых необходимо пользоваться свойством близости точек ${}^1\mathbf{x}$ и ${}^2\mathbf{x}$ при ${}^2\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a}$, т. е. разложить T_{ij} по ${}^2x_f - {}^1x_f$. Тогда и следует учитывать свойство (2.68), кото-

рое и приводит к сокращению или обращению в нуль всех «лишних» членов.

Итак, уравнение для В (2.67) получено. Осталось только понять, что подразумевается под многоточиями в этом уравнении. Для этого обратимся снова к (2.66). На это выражение можно смотреть как на разложение точного уравнения не только по дифференциальным операторам ${}^{\alpha}\partial_j$, но и по малому расстоянию между точками. Поэтому следующие невыписанные члены разложения более высокого порядка по степени оператора ${}^{\alpha}\partial_j$ тоже должны содержать либо константы, либо линейные (или в крайнем случае квадратичные) члены по \mathbf{r} . Размерность констант при членах типа

$${}^{\alpha\beta\gamma}T_{ij}{}^{\alpha}\partial_i{}^{\beta}\partial_j{}^{\gamma}\partial_j p_2, {}^{\alpha\beta\gamma\delta}T_{ijfm}{}^{\alpha}\partial_i{}^{\beta}\partial_j{}^{\gamma}\partial_f{}^{\delta}\partial_m p_2$$

такова, что в окончательное уравнение они должны войти только с таким же количеством операторов ∂_i , действующих теперь уже на В. Но поскольку поле В крупномасштабное, эти члены малы по сравнению с выписанными по параметру l/L . Далее, члены типа

$${}^{\alpha}\partial_i{}^{\beta}\partial_j{}^{\gamma}\partial_m{}^{\delta}\partial_n{}^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{ijr}m r n p_2 \quad (2.69)$$

(A_{ij} — константы) могут войти в ответ лишь с таким же количеством производных. Действительно, при взятии производной по t от (2.52) действие операторов следует перенести на все выражение справа в (2.52). Иначе говоря, операторы ${}^1\partial_i$ и ${}^2\partial_j$ должны действовать на все выражение. Затем следует интегрировать по 2x , и члены правой части (2.52), на которые действует оператор ${}^2\partial_j$, исчезают. Оставшиеся уже определяются через само выражение (2.52), после чего и получается уравнение для В. В результате переноса действия операторов ${}^1\partial_i$, ${}^2\partial_j$ на все выражение число их либо сохранится, либо уменьшится на единицу при взятии производной от $({}^2x_i - {}^1x_i)({}^2a_j - {}^1a_j)^{-1}$. Но члены такого типа не могут войти в ответ: размерность ${}^{\alpha}\partial_i{}^{\beta}\partial_j{}^{\gamma}\partial_f{}^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{ijr}r_n$ не есть размерность частоты, необходимой для уравнения (2.67). Остаются только те члены, которые сохраняют число операторов. Но тогда, несмотря на то что A_{ij} в (2.69) имеет размерность коэффициента диффузии и этот член, казалось бы, мог конкурировать с первым в правой части (2.67) член (2.69) мал: в него входит \mathbf{r} квадратично, и он исчезает при $\mathbf{r} \rightarrow 0$.

Вывод следующий: уравнение (2.67) представляет собой разложение по малому параметру l/L и обрывание его на второй производной законно. Напомним теперь, что марковский процесс тоже, конечно, приводит к уравнению (2.67) с коэффициентами, выраженными через эйлерово поле скорости. Но если попытаться раскладывать весь ряд теории возмущений по параметру $\varepsilon = \tau/v$, который для марковского процесса равен нулю, то, кроме выписанных членов, в (2.67) появятся члены такого же типа, например $D_T' \Delta V$. При этом D_T' будет малым по сравнению с D_T , только если параметр ε мал. При $\varepsilon \approx 1$ разложение (2.67) будет уже «плохим». Несмотря на это, многие авторы верили в то, что окончательное уравнение будет все равно типа (2.67), но только

связь коэффициентов D_T и $C(0)$ с эйлеровыми характеристиками неизвестна (или известна только по порядку величины).

Лагранжево описание дало возможность строго получить уравнение для крупномасштабного поля \mathbf{V} и коэффициенты точным образом связать с лагранжевыми характеристиками. Заметим, что с точки зрения кинематической задачи динамо совершенно безразлично, как задавать поле скорости: через эйлеровы корреляционные функции, через характеристический функционал (эйлерового поля) или с помощью лагранжевых характеристик. Запись уравнений в эйлеровой форме наглядна, проста, но при $R'_m \gg 1$ и $\varepsilon \approx 1$ не допускает решения в конечном виде. Здесь встает проблема малого параметра, а его нет в реальной турбулентности. Выясняется, что если задавать лагранжевы характеристики, то динамика поля определяется в точном виде. Что касается определений этих характеристик в данной конкретной прикладной задаче, то, как сказано в подразд. 6, они определяются из динамики спектра скалярной примеси в турбулентном потоке, т. е. из динамики корреляционной функции пульсаций θ .

Обычно задачу о генерации магнитного поля сопоставляют с задачей о скалярной примеси (или градиента скалярной примеси): и та, и другая — задачи о *пассивных* величинах, не влияющих на турбулентность. В эйлеровой постановке ни одна из этих задач не решается в конечном виде, в лагранжевой — решается для магнитного поля. Для скалярной примеси задача становится бессмысленной. Задание лагранжевых характеристик есть фактически задание поля скалярной примеси.

8. Точные немарковские модели

В предыдущем подразделе было получено строго выведенное уравнение для \mathbf{V} . Можно ли не просто строго, но точно решить задачу, т. е. вообще не пользоваться малым параметром l/L (хотя он и реален)? Иначе говоря, можно ли как-нибудь просто задать p_2 в точном виде и получить уравнение для \mathbf{V} ?

Речь тем самым идет о модели, и, конечно, немарковской модели, ибо марковская модель не является адекватной реальной турбулентности. Одна такая модель фактически была изложена в подразд. 7, если считать, что p_2 задавалось как решение уравнения (2.63), но в котором необходимо оставить лишь выписанные члены

$$\partial p_2 / \partial t = \sum_{\alpha, \beta} T_{ij} (\alpha x - \beta x) \alpha \partial_i \beta \partial_j p_2. \quad (2.70)$$

В гл. III, подразд. 2, будет показано, что модель (2.70) физически реализуема. Поэтому можно смотреть на (2.70) как на модель, при этом в уравнении (2.67) тоже можно оставить только выписанные члены, и оно будет точным.

Здесь мы изложим также другую модель, в которой p_2 задается в аналитическом виде [48]. Заметим, что задание (2.70) не дает

возможности определить само p_2 , поскольку оно справедливо лишь при $t \gg \tau$, а начальные условия при некотором $t = t_0 \gg \tau$ неизвестны.

Требования, налагаемые на функцию распределения. Вернемся опять к точному выражению (2.52). Его можно записать в виде

$$B_i({}^1x, t) = \int G_{ij}({}^1x - {}^1a, t) B_j({}^1a) d{}^1a. \quad (2.71)$$

Здесь мы пользуемся однородностью турбулентности, поэтому тензор отклика G_{ij} зависит лишь от ${}^1x - {}^1a$. Очевидно, что фурье-образ (2.71) записывается в виде

$$B_i(\mathbf{k}, t) = G_{ij}(\mathbf{k}, t) B_j(\mathbf{k}, 0). \quad (2.72)$$

Возьмем производную от (2.72) по времени. Ясно, что тензор G_{ij} должен удовлетворять уравнению $\partial G_{ij}/\partial t = K_{ij}(\mathbf{k}) G_{jj}(\mathbf{k})$, где \hat{K} не зависит от времени. Доказательство точно такое же, как при выводе (2.42): это следствие стационарности турбулентности. Тогда вместо (2.72) имеем $\partial B_i(t)/\partial t = K_{ij}(\mathbf{k}) B_j(t)$. Общий вид тензора \hat{K} для изотропной турбулентности есть $K_{ij} = A(k) \delta_{ij} + B(k) k_i k_j + iC(k) \varepsilon_{ijj} k_j$. Теперь учтем крупномасштабность поля B , т. е. то, что k мало по сравнению с $2\pi/l$. Можно воспользоваться разложением типа (2.45): $K_{ij} = -D_\tau k^2 \delta_{ij} + iC(0) \varepsilon_{ijj} k_j$. Член нулевого порядка по k отсутствует по той же причине, что и в (2.45): согласно точному уравнению (1.7) реакция турбулентности на поле существенно неоднородна. Усреднение $\text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ приводит к выражению $\text{rot} \langle [\mathbf{v}\mathbf{H}] \rangle$, которое не может быть постоянным для ограниченного в пространстве поля (а именно такое поле имеет смысл рассматривать в теории динамо: чисто однородное поле создается внешними источниками). Член $B k_j k_j$ мы не выписали, поскольку при умножении его на B_j он даст нуль ($k_j B_j(\mathbf{k}) = 0$). Если подставить это выражение для \hat{K} в уравнение для B , то, возвращаясь назад к x -представлению, получится, естественно, уравнение (2.67). Но теперь уже не так просто показать, что $D_\tau > 0$, если сравнивать с (2.45).

Обозначим ${}^2a - {}^1a = \delta a$. Удобно перейти к распределению $p_2(\xi, \eta | \delta a)$ векторов $\xi = {}^1x - a$ и $\eta = {}^2x - (a + \delta a)$. Тогда, очевидно,

$$G_{ij} = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \int (\eta_i - \xi_i + \delta a_j) (\delta a_j)^{-1} p_2(\xi, \eta | \delta a) \exp(-i\xi \mathbf{k}) d\xi d\eta. \quad (2.73)$$

Выражение (2.73) содержит характеристическую функцию по параметру ξ (фурье-образ функции распределения координаты ξ). Поэтому удобно рассматривать характеристическую функцию двух координат:

$$p_2(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa} | \delta a) = \int p_2(\xi, \eta | \delta a) \exp(-i\xi \mathbf{k} - i\eta \boldsymbol{\kappa}) d\xi d\eta.$$

Последнюю выберем в форме

$$p_2 = \exp [-gt (\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa})^2 + b\mathbf{k}\boldsymbol{\kappa}], \quad (2.74)$$

g — константа, b — функция от $|\delta a|$ и t . Выражение (2.74) для характеристической функции и есть модель турбулентности. Напомним, что характеристическая функция есть фурье-образ функции распределения. Мы изложим требования, налагаемые на характеристическую функцию. Очевидно, что все они могут быть переформулированы для функции распределения.

1) Из изотропии турбулентности следует, что p_2 есть функция только k , κ , $|\delta a|$, $k\delta a$, $\kappa\delta a$, $\mathbf{k}\boldsymbol{\kappa}$ и t — этому удовлетворяет (2.74).

2) При $\delta a \rightarrow 0$ должно выполняться $p_2(\xi, \eta | \delta a) \rightarrow p_2(\xi) \delta(\xi - \eta)$ (в этом случае точки 1x , 2x совпадают). Потребуем, чтобы при $\delta a \rightarrow 0$ b вело себя как $|\delta a|^n$, $n > 1$, тогда это требование выполняется.

3) При интегрировании по η $p_2(\xi, \eta | \delta a)$ превращается в функцию $p_2(\xi)$, не зависящую от δa (и аналогично для интегрирования по ξ). Интегрирование по η (ξ) соответствует в (2.74) $\boldsymbol{\kappa} = 0$ ($\mathbf{k} = 0$). Ввиду независимости g от δa это требование удовлетворяется.

4) Интегрирование по ξ, η функции распределения $p_2(\xi, \eta | \delta a)$ дает единицу ($p_2(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa} | \delta a) = 1$ при $\mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa} = 0$).

5) При $t \rightarrow \infty$ и $\delta a \rightarrow \infty$ жидкие частицы ведут себя независимо, $p_2(\xi, \eta | \delta a) \rightarrow p_1(\xi) p_1(\eta)$. Для этого потребуем, чтобы $b \rightarrow 2gt$ при $t \rightarrow \infty$ и $\delta a \rightarrow \infty$. Именно по этой причине в (2.74) и введен коэффициент b .

6) При $t \rightarrow 0$ должно выполняться $p_2(\xi, \eta | \delta a) \rightarrow \delta(\xi) \delta(\eta)$. Для этого потребуем, чтобы $b \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

7) Замена $\xi \rightarrow \eta$ должна быть эквивалентна замене $\delta a \rightarrow -\delta a$. С другой стороны, замене $\xi \rightarrow \eta$ эквивалентна замена $\mathbf{k} \rightarrow \boldsymbol{\kappa}$ в (2.74). Симметрия (2.74) к этой перестановке и четность p_2 по отношению к δa приводят к удовлетворению этого требования.

8) Функция распределения согласно (2.74) имеет вид

$$p_2(\xi, \eta | \delta a) = (2\pi)^{-3} b^{-3/2} (4gt - b)^{-3/2} \times \\ \times \exp \{ -[gt(\xi^2 + \eta^2) - (2gt - b)\xi\eta] b^{-1} (4gt - b)^{-1} \}. \quad (2.75)$$

Она положительна, определена и ограничена при $b > 0$, $4gt - b > 0$, т. е. $g > 0$. Эти условия не противоречат перечисленным выше требованиям, налагаемым на g и b .

Тензор отклика для ОИТ. Переход к координатам $\xi, \eta - \xi$ (вместо ξ и η) эквивалентен переходу в (2.74) к переменным $\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{K}, \boldsymbol{\kappa}$. В них p_2 записывается в виде $p_2 = \exp [-gtK^2 + b(\mathbf{K} - \boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{\kappa}]$. Теперь (2.73) можно записать так:

$$G_{ij} = \lim_{\substack{\delta a \rightarrow 0 \\ \boldsymbol{\kappa} = 0}} \left[\delta_{ij} - \frac{1}{i\delta a_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right] p_2(\mathbf{K}, \boldsymbol{\kappa}). \quad (2.76)$$

Из второго требования следует обращение в нуль второго члена

в фигурной скобке (2.76). В результате имеем

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \delta_{ij} \exp(-gtk^2), \\ \langle \mathbf{V}(\mathbf{k}, t) \rangle &= \langle \mathbf{V}(\mathbf{k}, 0) \exp(-gtk^2) \rangle, \\ \partial \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}) \rangle / \partial t &= D_T \Delta \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}) \rangle, \quad D_T = g > 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Итак, в данной модели получается уравнение турбулентной диффузии магнитного поля с коэффициентом диффузии

$$D_T = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \langle \xi^2 \rangle. \quad (2.78)$$

Полезно сопоставить поведение среднего магнитного поля по (2.77) с поведением усредненной скалярной примеси. Согласно выражениям (2.42), (2.43) последнее определяется одноточечной функцией распределения. Для ее определения достаточно положить в (2.74) $\mathbf{x} = 0$ (эта операция эквивалентна интегрированию функции распределения по второй точке \mathbf{x} , чем достигается переход к одноточечной функции распределения). Тогда $G = \exp(-gtk^2)$ или в \mathbf{x} -представлении

$$p_1(x, t) = G(x, t) = (4\pi gt)^{-3/2} \exp(-x^2/4gt). \quad (2.79)$$

Сопоставляем (2.79) с разложением (2.45). Очевидно, что $g = D_T$, причем в нашей модели величина g обязательно должна быть положительной.

Отметим, что (2.79) справедливо не только при асимптотически больших t , $t \gg \tau$, оно справедливо и при $t < \tau$. Какой же смысл имеет (2.79)? Неужели существует статистическая немарковская модель, для которой можно получить уравнение диффузии скалярной примеси и его решение (2.79) в точном виде? Разумеется, нельзя обольщаться на этот счет. Дело в том, что задание p_1 попросту эквивалентно заданию статистических характеристик скалярной примеси (см. подразд. 5). Поэтому на (2.79) можно смотреть как на тождество и сказать: получилось то, что было задано с самого начала.

Можно ли утверждать, что и для магнитного поля решение было задано (в виде (2.73))? Нет. Здесь было задано не решение, а турбулентность (или поле скорости) в виде задания функции распределения в форме (2.74). Но согласно подразд. 6 это эквивалентно тому, что задана динамика корреляционной функции скалярной примеси. Поэтому следует иметь в виду, что магнитное поле не ведет себя подобно скалярной примеси. Сходство уравнений (2.77) для ОИТ и (2.46) — уравнений диффузии, где даже коэффициенты диффузии D_T совпадают, — еще ничего не доказывает. Дело в том, что само утверждение о положительности D_T не следует уже из общих соображений, как в подразд. 5. Здесь это неравенство ($g = D_T > 0$) необходимо для рассматриваемой модели: в противном случае модель не будет удовлетворять требованиям, налагаемым на p_2 . Более того, далее мы увидим, что для ОИТ имеется генерация магнитного поля, в то время как генерация $\langle \theta \rangle$, естественно, невозможна.

Интересно отметить, что распределение (2.75) похоже на нормальное распределение. Но оно нормально лишь для ξ и η . Сюда также входит b — функция от δa , так что δa не входит нормальным образом в распределение (2.75). Это обстоятельство оказывается важным для другого случайного процесса, введенного Крейкнаном [7] (в дальнейшем — процесс П): пусть турбулентность статистически независима, но обладает идентичным распределением вероятностей в последующие интервалы времени Δt , $t = N\Delta t$, N — целое число. Тогда полное распределение вероятности в момент t не является гауссовым даже по ξ и η , если на интервале Δt она совпадает с (2.75), именно потому, что δa входит в (2.75) сложным образом. Тем не менее поведение магнитного поля в случае ОИТ для процесса П все равно подчиняется уравнению (2.77). Дело в том, что для этого случая

$$\hat{G}(t) = \hat{G}^{(N)} \hat{G}^{(N-1)} \dots \hat{G}^{(1)}, \quad (2.80)$$

$$G_{ij}(\mathbf{k}, t) = \delta_{ij} \exp(-gtk^2). \quad (2.81)$$

Здесь $t = N\Delta t$, $\hat{G}^{(s)}$ — тензор отклика на интервале s , по определению совпадающий с (2.77), где вместо t надо подставить $N\Delta t$. Представление (2.80) в виде произведения справедливо ввиду статистической независимости интервалов. Это выражение справедливо для распределения более общего, чем (2.75), и будет использовано в следующем разделе. Тензор же отклика в виде (2.81) имеет место только для ОИТ. Совпадение (2.81) и первого выражения (2.77) для двух разных процессов объясняется тем, что фактически здесь используется не двухточечное распределение вероятностей для ξ и η , а одноточечное — для ξ . Но для этой координаты распределение является чисто гауссовым ((2.74) с $\kappa = 0$), и поэтому процесс П, будучи произведением гауссовых процессов, тоже является гауссовым.

Тензор отклика для ОИТ. Свойства отражательной неинвариантности (гиротропности) турбулентности естественным образом вводятся в функцию распределения. Запишем характеристическую функцию в виде

$$p_2 = \exp\{-gt(\mathbf{k} + \kappa)^2 + b\kappa\mathbf{k} + \alpha[\kappa\kappa]\delta a\} \quad (2.82)$$

вместо (2.74). Естественно, α есть псевдоскаляр. Требования со второго по четвертое и седьмое, накладываемые на p_2 , выполняются автоматически. Требование первое модифицируется добавлением псевдоскаляра $[\kappa\kappa]\delta a$. Для удовлетворения пятого и шестого требуем, чтобы $\alpha \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, а при $t \rightarrow \infty$ α росло медленнее, чем t : при $\delta a \rightarrow \infty$ $\alpha \sim |\delta a|^{-2}$. Что касается ограниченности и положительной определенности функции распределения (восьмое требование), то это выполняется при $b > 0$, $4gt - b > 0$, $|\alpha| < [b(4gt - b)/|\delta a|]^{1/2}$, что не противоречит, перечисленным требованиям.

Для вычисления тензора отклика отметим, что второй член в квадратной скобке (2.76) теперь уже не обращается в нуль. Для

получения результата перейдем к переменным k, κ . Вычисляя (2.76), получим

$$G_{ij}(\mathbf{k}, t) = (\delta_{ij} + \alpha i \varepsilon_{ijf} k_f) \exp(-gtk^2). \quad (2.83)$$

Решение (2.83) не есть динамо-решение. Действительно, при $t \rightarrow \infty$ α растет медленнее, чем t (если вообще растет). Поэтому $B(t) = \hat{G}B(0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для нахождения растущего решения обратимся к процессу Π с распределением вероятности (2.82) на каждом временном интервале Δt .

Теперь тензор отклика (2.83) справедлив только на интервале Δt , так что вместо t в него следует подставить Δt , а под α будем подразумевать его значение в конце интервала, т. е. $\alpha = \alpha(\Delta t)$. Тогда согласно (2.80) с одинаковыми $\hat{G}^{(s)}$, определяемыми выражениями (2.83), имеем

$$G_{ij}(\mathbf{k}, t) = \exp(-gN\Delta t k^2) \left[\delta_{ij} \sum_{n=0}^{N'} C_{2n}^N (\alpha k)^{2n} + \alpha i \varepsilon_{ijf} k_f \sum_{n=1}^{N''} C_{2n-1}^N (\alpha k)^{2n-2} \right]. \quad (2.84)$$

Здесь C_m^N — биномиальные коэффициенты, $N' = N'' = N/2$, если N — четное, и $N' = (N-1)/2$, $N'' = (N+1)/2$, если N — нечетное. Заметив, что две суммы в квадратных скобках (2.84) совпадают с четной (первая сумма) и нечетной (вторая сумма, умноженная на αk) составляющими функции $(1 + \alpha k)^N$ от аргумента αk , получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N'} C_{2n}^N (\alpha k)^{2n} &= \frac{1}{2} [(1 + \alpha k)^N + (1 - \alpha k)^N] = \\ &= \frac{1}{2} \{ \exp[N \ln(1 + \alpha k)] + \exp[N \ln(1 - \alpha k)] \}, \\ \sum_{n=1}^{N''} C_{2n-1}^N (\alpha k)^{2n-2} &= (2\alpha k)^{-1} [(1 + \alpha k)^N - (1 - \alpha k)^N] = \\ &= (2\alpha k)^{-1} \{ \exp[N \ln(1 + \alpha k)] - \exp[N \ln(1 - \alpha k)] \}. \end{aligned}$$

Заменяя N на $t/\Delta t$, получим окончательно

$$G_{ij}(k, t) = \frac{1}{2} \exp(-gtk^2) [\delta_{ij} (e^+ + e^-) + i \varepsilon_{ijf} k_f k^{-1} (e^+ - e^-)], \quad (2.85)$$

$$e^+ = \exp \left[\frac{t}{\Delta t} \ln(1 + \alpha k) \right], \quad e^- = \exp \left[\frac{t}{\Delta t} \ln(1 - \alpha k) \right].$$

Величина $\alpha k \ll 1$, поскольку α имеет размерность длины и, во всяком случае, не больше корреляционной длины l , а $lk \ll 1$. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Величина $e^+ + e^-$ есть истинный скаляр, $e^+ - e^-$ — псевдоскаляр. Дело в том, что разложение величины $e^+ + e^-$ по αk содержит лишь четные

степени α , а разложение $e^+ - e^-$ — нечетное, α^{2n} есть скаляр, в то время как $\alpha^{2n+1} = \alpha^{2n}\alpha$ — псевдоскаляр. Поэтому выражение в квадратных скобках (2.85) представляет собой сумму двух истинных тензоров, как и должно быть по правилам размерностей. Для сравнения с результатами Крейкнана [7] разложим $\ln(1 \pm \alpha k)$ до второго порядка по степеням k (в [7] с самого начала используется разложение по k не выше второго порядка). Тогда получим

$$G_{ij}(k, t) = \exp[-(g + \alpha^2/2\Delta t)tk^2] \times \left(\delta_{ij} \operatorname{ch} \alpha k \frac{t}{\Delta t} + i \varepsilon_{ijfk} k_f k^{-1} \operatorname{sh} \alpha k \frac{t}{\Delta t} \right). \quad (2.86)$$

Это решение, полученное в [46], соответствует уравнению генерации

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -i \frac{\alpha}{\Delta t} [\mathbf{k} \mathbf{B}] - D'_T k^2 \mathbf{B}, \quad D'_T = g + \frac{\alpha^2}{2\Delta t},$$

результатам [7], и в x -представлении это уравнение совпадает с (2.67). Для сравнения коэффициентов генерации и диффузии, найденных в [7], отметим, что для модели (2.82) имеем

$$\langle \xi^2 \rangle = \langle \xi_i \xi_j \partial^1 x_i / \partial a_j \rangle = \langle 3\xi_3^2 \partial^1 x_3 / \partial a_3 \rangle, \quad (2.87)$$

$$\langle \xi_f \partial^1 x_i / \partial a_j \rangle = -\alpha \varepsilon_{\dagger j f}, \quad \alpha = -1/6 \varepsilon_{ijf} \langle \varepsilon_f \partial^1 x_i / \partial a_j \rangle = \langle \xi_3 \partial^1 x_2 / \partial a_1 \rangle. \quad (2.88)$$

Следовательно,

$$\frac{\alpha}{\Delta t} = \left\langle \xi_3 \frac{\partial^1 x_2}{\partial a_1} \right\rangle \frac{1}{\Delta t}, \quad D'_T = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left\langle \xi_3 \frac{\partial^1 x_3}{\partial a_3} \right\rangle + \left\langle \left(\xi_3 \frac{\partial^1 x_2}{\partial a_1} \right)^2 \right\rangle \right\}$$

в полном соответствии с [7]. Точное решение (2.85), так же как его приближенный вид (2.86), полученный Крейкнано при учете квадратичных по k членов, имеет экспоненциально растущий характер при $|\alpha|k > gk^2$, т. е. является динамо-решением.

Интересно отметить, что коэффициент турбулентной диффузии D'_T зависит уже от гиротропных характеристик турбулентности, т. е. от α , в то время как для марковской модели этой зависимости нет [46]. При отказе от строго марковской модели в следующем приближении по Кляцкину—Татарскому [49] D'_T тоже начинает зависеть от α . К сожалению, непосредственное сравнение коэффициентов (2.88) с полученными в [49] и, как можно надеяться, хорошо описывающими реальную турбулентность, получить весьма трудно. Дело в том, что коэффициенты (2.88) вычислены для лагранжевых характеристик турбулентности, а в [49] — для эйлеровых. Переход же от лагранжевых к эйлеровым характеристикам и наоборот осуществляется в виде громоздких бесконечных рядов [50].

Процесс II допускает предельный переход к марковскому при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е. $N \rightarrow \infty$. В этом случае должна исчезнуть зависимость коэффициента диффузии от α . Так действительно получается. Для

того чтобы убедиться в этом, напомним, что под α в (2.88) подразумевается значение коэффициента α в модели (2.82) в момент $t = \Delta t$, т. е. $\alpha(\Delta t)$. Поэтому коэффициент генерации $\alpha(\Delta t)/\Delta t \rightarrow \alpha'$ при $\Delta t \rightarrow 0$ α' — производная функции $\alpha(\Delta t)$ в нуле (само же значение α в нуле есть нуль, см. выше). Поэтому при малых Δt $\alpha = \alpha' \Delta t$ и $\langle \xi_3 \times \partial^1 x_2 / \partial a_1 \rangle = \alpha' \Delta t$ и первый коэффициент в (2.88) есть α' . В то же время $\langle (\xi_3 \partial^1 x_2 / \partial a_1)^2 \rangle (\Delta t)^{-1} = (\alpha')^2 \Delta t$, и эта величина, дающая вклад в D_T в (2.88), стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Что касается $1/2 \langle \xi_3^2 \partial^1 x_3 / \partial a_3 \rangle (\Delta t)^{-1} = 1/2 \langle \xi_3^2 \rangle (\Delta t)^{-1}$, то эта величина, как известно, есть конечная величина в марковской модели при $\Delta t \rightarrow 0$ и представляет собой коэффициент диффузии.

Общее обсуждение двух немарковских моделей. Итак, модель турбулентности, для которой задается p_2 по (2.74) для ОИТ и по (2.82) для ОНИТ, позволяет получить уравнение для крупномасштабного поля в точном виде. Существенно, что модель не является марковской, т. е. параметр $\varepsilon = \tau l / v$ не мал.

Несколько слов об ОИТ. Генерация здесь отсутствует. Коэффициент диффузии магнитного поля D_T получается положительным. Отметим, что результат (2.78) — выражение для коэффициента турбулентной диффузии — может быть получен и в более общей, чем (2.74), модели. Дело в том, что в конечный результат входит только g , зависимость от b отсутствует. Обращаясь к (2.76), видим, что точно такой же результат получится, если характеристическая функция $p_2(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ и функция распределения — четные функции от δa , т. е. все величины типа δa , δb входят по меньшей мере квадратично по δa . Предположение об инвариантности функции распределения при замене δa на $-\delta a$ кажется вполне правдоподобным. Это свойство касалось двухточечной функции распределения. Что касается одноточечной, то она должна быть гауссовой, тогда получится результат (2.78). Это предположение находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [42]. Что касается модели турбулентности (2.70), то здесь тоже получается коэффициент диффузии D_T положительным.

Генерация магнитного поля получается только для ОНИТ. В модели (2.70) — специальным заданием тензора T_{ij} . Модель (2.82) все еще не дает генерацию поля, необходимо дополнительно рассмотреть случайный процесс Π , для которого функция распределения (2.82) описывает поведение функции распределения лишь на конечном интервале времени Δt . Тогда генерация поля имеет место.

Интересно отметить, что гиротропная часть (α в (2.87)) влияет на коэффициент диффузии D_T' (см. (2.88)). Но все же коэффициент диффузии опять получается положительным: первый член в фигурной скобке (2.88) есть старое выражение по (2.78) и он, конечно, существенно положителен, второй есть квадрат действительной величины. Сравним теперь модели (2.74) и (2.82) с другого типа моделью (2.70). В последнем случае, как будет показано в гл. III,

модель описывает реальный физический процесс. Но недостатком этой модели является то, что при этом оказывается заданным лишь уравнение на p_2 при $t \gg \tau$, а не само p_2 . Что касается моделей (2.74) и (2.82), то они свободны от этого недостатка. Зато они обладают другим; невозможно строго доказать, что они физически реализуемы. Выше были перечислены требования, налагаемые на p_2 . Но на каком основании мы можем утверждать, что это и есть все требования? Можно все же надеяться на то, что функции, фигурирующие в (2.74) и (2.82), остающиеся все еще произвольными (с довольно общими ограничениями асимптотического характера), могут быть подобраны таким образом, чтобы удовлетворить всем (неизвестным нам требованиям).

9. Генерация крупномасштабных магнитных полей в космосе

В этом подразделе мы подытожим все сказанное в данной главе. Будем делать упор на астрофизический аспект теории. Изложение все же будет носить более общий характер, чем в подразд. 6—8. Дело в том, что к настоящему времени строгое обоснование уравнения для \mathbf{V} в лагранжевом подходе осуществлено лишь для однородной и изотропной турбулентности. Реальная турбулентная космическая плазма существенно неоднородна. Тем не менее хорошее подтверждение предыдущих подходов к описанию крупномасштабных полей в однородной турбулентной среде с помощью лагранжевого описания позволяет надеяться на то, что предыдущие результаты для неоднородной турбулентности тоже удастся строго обосновать. Пока мы будем верить им и отошлем читателя за подробностями к монографии [1]. Итак, этот подраздел будет носить обзорный характер.

Явления в конвективной зоне. Прежде всего, если имеется не только турбулентная составляющая скорости, но и присутствует также крупномасштабная скорость \mathbf{V} (см. ((2.3)), то в общее уравнение (2.67) следует добавить член $\text{rot} \cdot [\mathbf{V}\mathbf{B}]$. Кроме того, анизотропная турбулентность приводит к появлению анизотропии коэффициента диффузии: D_T в (2.67) заменяется тензором [1, 47]. Это обстоятельство до сих пор не учитывалось в расчетах динамо-решений в астрофизике. При наличии неоднородности среднеквадратичной скорости, т. е. $\langle v^2 \rangle$ зависит от координат, возникает явление диамагнетизма: вытеснение магнитного поля из области интенсивной турбулентности (см. [15, 51]).

Результат действия диамагнетизма можно описать в виде эквивалентного крупномасштабного потока магнитного поля со скоростью V_D :

$$V_D = -^{1/2} \nabla D_T, \quad D_T = ^{1/3} v l, \quad v = (\langle v^2 \rangle)^{1/2}. \quad (2.89)$$

Иначе говоря, к крупномасштабной скорости \mathbf{V} следует добавить также V_D . Поток крупномасштабного поля или появлением макроскопической (крупномасштабной) скорости как результат действия

турбулентности называют иногда накачкой поля. Такое название обязано следующему обстоятельству. Скорость (2.89) потенциальна, т. е. эквивалентна сжатию или расширению всего вещества. Ясно, что при сжатии будет увеличиваться V . Впрочем, в гл. I, подразд. 2, было показано, что и несжимаемое движение типа дифференциального вращения вызывает накачку поля.

Сам термин «накачка» был введен Дробышевским и Юферевым [12] для макроскопической скорости, появляющейся из-за топологических свойств конвективных ячеек. Для работы этого механизма конвективная ячейка должна охватывать всю конвективную зону, в противном случае накачка осуществляется только на размере ячейки (см. [1]) и перестанет тем самым быть крупномасштабной. Следует также иметь в виду, что топологическая накачка может в принципе представлять интерес для более или менее однородной по плотности конвективной зоны. Дело в том, что если плотность существенно меняется с глубиной (как в солнечной конвективной зоне), то скорость в самой конвективной ячейке убывает с глубиной обратно пропорционально плотности. Иначе средняя плотность в данной точке в конвективной зоне не будет сохраняться. Но это означает, что в глубине конвективной зоны (Солнца), где плотность велика, скорость в конвективной ячейке весьма мала. А скорость топологической накачки никак не может превзойти скорость в ячейке. В стратифицированной по плотности среде по современным представлениям размер ячейки не должен сильно превышать так называемую высоту однородной атмосферы, равную $(\nabla \ln \rho)^{-1}$. Следовательно, ячейки тоже носят слоистый характер, если среда сильно неоднородна по плотности. Но в этом случае топологической накачки не будет.

Накачка магнитного поля может быть также обусловлена градиентом плотности. Иначе говоря, $V_D \sim \nabla \rho$. Это явление для двумерной турбулентности было обнаружено в [52]. Если поле скорости лежит в плоскости XU , т. е. $v = \{v_x, v_y, 0\}$, и магнитное поле перпендикулярно этой плоскости, $B = \{0, 0, B_z\}$, то будет иметь место накачка в направлении $\nabla \rho$. В дальнейшем в работе [53] было показано, что поле, лежащее в этой же плоскости XU , смещается в обратном направлении $-\nabla \rho$. Таким образом, двумерная турбулентность «сортирует» поля: часть потока поля направлена вниз в направлении $\nabla \rho$, часть — вверх в направлении $-\nabla \rho$. Что же произойдет, если турбулентность трехмерная и по-возможности (при наличии все же $\nabla \rho \neq 0$, т. е. некоторого избранного вектора $\nabla \rho$) изотропная? Ясно, что эти два противоположных эффекта будут конкурировать в общем случае между собой, и, как показано в [53], для квазиизотропной турбулентности эффект накачки вообще исчезает. Для его действия необходима дополнительная (не связанная с градиентом плотности) анизотропия. Двумерная турбулентность представляет собой сильную анизотропию (с избранным направлением $\{0, 0, 1\}$) и поэтому сохраняет оба эти эффекта.

Выпишем уравнение для крупномасштабного магнитного поля,

пренебрегая анизотропией (что, по-видимому, оправдано для солнечной конвективной зоны) и топологической накачкой:

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}] + \text{rot} [\mathbf{V}_D \mathbf{B}] - \text{rot} D_T \text{rot} \mathbf{B} + \text{rot} \alpha \mathbf{B}. \quad (2.90)$$

Отметим, что гиротропность тесно связана с анизотропией (см. подразд. 2), одно из выделенных направлений параллельно вектору угловой скорости. Учет анизотропии приведет к тому, что α превратится в тензор. Расчет анизотропного α -эффекта был предпринят Буссе [54]. В таком виде уравнение для B широко используется в расчетах. Поток V_D особенно велик на границе конвективной зоны, где $\langle v^2 \rangle$ уже довольно быстро меняется, притом на величину, сравнимую с нею самой. Следовательно, вблизи границы V_D велика (см. 2.89)). Это можно сформулировать как граничное условие, а внутри зоны в первом приближении пренебречь V_D . Тогда мы будем иметь уравнение генерации «в чистом виде», т. е. без накачки. Заметим уже здесь, что в гл. IV мы покажем, что нелинейные эффекты ослабляют диамагнетизм. Зато появляется весьма сильный эффект: поток из-за градиента плотности. Пока же мы в уравнении (2.90) вовсе пренебрежем накачкой. Дополнительно будем считать, что магнитное поле осесимметричное и движение \mathbf{V} есть дифференциальное вращение. Тогда вместо системы (1.18) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A_\varphi \rangle = \alpha B_\varphi + D_T \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \langle A_\varphi \rangle, \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_\varphi = & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial ar}{\partial r} B_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha B_r \right) + r \sin \theta B_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \\ & + B_\theta \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + D_T \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) B_\varphi. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Связь B_θ , B_r с $\langle A_\varphi \rangle$ элементарно может быть получена усреднением последних выражений (1.19).

Мы видим теперь, что полоидальное поле $\langle A_\varphi \rangle$ уже не затухает, как в (1.18), а связано с тороидальным B_φ . Именно это обстоятельство делает возможной генерацию поля. Тороидальное же поле B_φ генерируется теперь не только дифференциальным вращением, но и также в результате α -эффекта, т. е. того члена в (2.92), в который входит гиротропность α . Как правило, дифференциальное вращение более эффективно генерирует поле B_φ , чем α -эффект, т. е.

$$r^2 | \nabla \Omega | \gg \alpha. \quad (2.93)$$

В этом случае α -эффектом в (2.92) можно пренебречь, и тороидальное поле по-прежнему генерируется дифференциальным вращением. Обратная связь — генерация полоидального поля $\langle A_\varphi \rangle$ из тороидального осуществляется только α -эффектом. Эту генерацию называют $(\alpha - \Omega)$ -динамо, и инкремент нарастания поля (в том случае, когда поле экспоненциально нарастает, а не осцил-

лирует) по порядку величины равен

$$\gamma = (r/L) \sqrt{|\nabla\Omega|} \alpha. \quad (2.94)$$

Тогда же, когда выполняется неравенство, противоположное (2.93), поле B_ϕ тоже генерируется α -эффектом. Такое динамо называют α^2 -динамо, и его инкремент порядка

$$\gamma = \alpha/L. \quad (2.95)$$

Выпишем приближенное значение для α при больших числах Россби, $Ro = v/l\Omega$ (медленное вращение, например верхняя часть конвективной зоны Солнца):

$$\alpha = l^2\Omega\rho^{-1}\nabla\rho, \quad (2.96)$$

при малых числах Россби (быстрое вращение, например нижняя часть солнечной конвективной зоны):

$$\alpha = lv\Omega\nabla\rho(\rho\Omega)^{-1}. \quad (2.97)$$

Отсюда видно, что α не может стать больше, чем v , так как $l\rho^{-1} \times |\nabla\rho| \leq 1$. Это, впрочем, следует из общих соображений: из положительной определенности тензора (2.19) (как корреляционного тензора) следует $\langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle \leq v^2 l^{-1}$, отсюда для $\alpha \approx \langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle \tau$ при $\tau = l/v$ следует, что $\alpha \leq v$.

Теперь обратимся к тем преимуществам, которые дает теория динамо крупномасштабных полей. Как и было предсказано в подразд. 1 наст. главы, уравнения для \mathbf{B} просты по структуре. В частности, система (2.91), (2.92) описывает динамику осесимметричных полей. Поле скорости тоже осесимметрично (дифференциальное вращение). Отклонение от симметрии, необходимое для работы динамо, заложено в случайных движениях. При усреднении все становится симметричным. Кроме того, коэффициенты системы (2.91), (2.92) слабо зависят от координат. Вообще же уравнение (2.67) дает генерацию поля при коэффициентах строго постоянных. Разумеется, анализировать и численно интегрировать такое уравнение куда проще, чем (1.7), даже при простейшем поле скорости!

Если коэффициенты уравнения для \mathbf{B} строго постоянны, то, разумеется, изменение масштаба поля, о котором так много говорилось в гл. I, подразд. 5, не будет иметь места. Напомним, что уменьшение масштаба создавало главные трудности в проблеме генерации поля. Для постоянных коэффициентов сохранение масштаба следует из того, что решение для \mathbf{B} можно искать в виде (невзаимодействующих) фурье-гармоник или соответствующих сферических гармоник. Но даже общая система уравнений для осесимметричного поля (2.91), (2.92) при α , D_T и Ω , зависящих лишь от r и θ , не приводит к изменению масштаба. Это обстоятельство тоже большое преимущество рассмотрения крупномасштабных полей.

При учете накачки в (2.90) со скоростью V_D , определяемой (2.89), уменьшение масштаба уже имеет место. Действительно, как говорилось выше, сама накачка есть «сжатие» поля со скоростью V_D . Поэтому представления о накачке применимы до тех пор, пока масштаб поля все еще больше, чем l . Это относится к накачке, описываемой потенциальной скоростью, как в (2.91), эквивалентной сжатию. В гл. I, подразд. 2, описана накачка дифференциальным вращением без уменьшения масштаба. Но даже если $V_D \sim \nabla\psi$, учет этого случая не так уж и сложен. Так, магнитный эффект на границе конвективной зоны учитывается с помощью граничных условий. В самой же конвективной зоне вектор V_D направлен радиально, это сильно упрощает как качественные рассуждения, так и расчеты. Наконец, нелинейные эффекты тоже приведут к изменению коэффициентов в системе (2.91), (2.92). Следовательно, рассмотрение крупномасштабных полей дает большие преимущества. В последнее время эта теория стала использоваться для объяснения звездных магнитных полей [55] и продвинулась дальше первой работы [56]. Мы вернемся к этому вопросу в гл. IV.

Может ли коэффициент диффузии стать отрицательным? До сих пор мы отвечали отрицательно на этот вопрос. Во всех моделях D_T был существенно положительным. Крейкнаном была предложена модель [57], в которой все же получился отрицательный коэффициент диффузии. Рассмотрим магнитные поля с масштабной $L_1 \gg l$. Тогда при наличии ОНИТ будем иметь уравнение

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = \text{rot } \alpha \mathbf{V} + D_T \Delta \mathbf{V}. \quad (2.98)$$

При выводе (2.98) предполагалось, что α и D_T есть усредненные величины по масштабу l . Это означает, что они могут меняться на масштабе L_1 . Пусть все же $D_T = \text{const}$, а α меняется на длине L_1 . Рассмотрим теперь еще более крупномасштабные поля, которые меняются на длине $L_2 \gg L_1$ и подчиняются усредненному (по пульсациям масштаба L_1) уравнению (2.98): $\partial \langle \mathbf{V} \rangle / \partial t = \text{rot } \langle \alpha \mathbf{V} \rangle + D_T \Delta \langle \mathbf{V} \rangle$, $\mathbf{V} = \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{b}$, $\langle \alpha \rangle = 0$. Для наиболее интересного случая $|\alpha| \gg D_T / L_1$ (аналог большого R'_m) эту задачу можно решить, полагая дополнительно, что α флюктуирует со временем τ_α :

$$l/v \ll \tau_\alpha \ll L_1/\alpha. \quad (2.99)$$

Первое неравенство здесь выписано для того, чтобы изменение α было все же медленным по сравнению со временем пульсаций турбулентности τ . В противном случае само уравнение (2.98) станет некорректным. Второе же неравенство соответствует «белому шуму» или марковскому процессу для $\langle \mathbf{V} \rangle$ в этом суперансамбле. Тогда результат для усредненного (точнее, суперусредненного) поля следующий:

$$\partial \langle \mathbf{V} \rangle / \partial t = \Phi \Delta \langle \mathbf{V} \rangle + D_T \Delta \langle \mathbf{V} \rangle, \quad (2.100)$$

-- $\Phi = \int_0^{\infty} \langle \alpha(t) \alpha(t+s) \rangle ds$, α — однородная и стационарная (в статистическом смысле) функция. Отрицательным коэффициент диффузии станет, если $\Phi < -D_T$.

Оценим теперь Φ . Самое большее, что здесь можно получить, — это, забыв, что τ_α должно быть малым, оценить его как $\tau_\alpha = L_1/\alpha$ (ср. с. (2.99)). Тогда $|\Phi| \approx \alpha^2 \tau_\alpha = \alpha L_1$. Итак, $|\Phi| > D_T$, если $\alpha L_1 > D_T = \frac{1}{3} \nu l$. Это условие соответствует нашему предположению о большой величине α (см. выше) и в принципе может выполняться за счет того, что $L_1 \gg l$ (хотя α и не может быть больше, чем ν).

Итак, коэффициент турбулентной диффузии может стать отрицательным, что соответствует генерации супермелкомасштабного поля. Разумеется, эта генерация есть следствие того, что (2.98) тоже дает генерацию поля. Что касается турбулентности в космических условиях, то реализация такого суперансамбля кажется маловероятной. Можно, впрочем, представить себе, что на турбулентность с внешним масштабом l накладываются вихри масштаба L_1 , в каждом из которых генерируется свое значение α , определяемое в (2.96), (2.97). Но в этом случае возникает новая «супердиффузия», обусловленная крупными вихрями. Коэффициент диффузии по порядку величины есть ΩL_1^2 , Ω — характерная угловая скорость вихря. Требование $\Phi = \alpha L_1 > \Omega L_1^2$, т. е. $\alpha > \Omega L_1$, уже не может быть выполнено. Действительно, при больших числах Ro определяем из (2.96) α , в результате получаем условие $l^2 > L_1 (\nabla \rho / \rho)^{-1}$. Это условие не может быть выполнено, так как $l < L_1$ и $l \nabla \rho / \rho \leq 1$. При малых Ro имеем (согласно (2.97)) $l^2 > (Ro)^{-1} L_1 (\nabla \rho / \rho)^{-1}$, это условие тоже невыполнимо.

Итак, отрицательный коэффициент диффузии может в принципе получиться, если специально задать флюктуирующую гиротропность. Конкретное приложение этого процесса указать трудно.

В развитой турбулентности присутствует целая область масштабов (см. подразд. 2). Это обстоятельство наводит на мысль, что отрицательный коэффициент диффузии может появиться за счет взаимодействия разных масштабов, как при получении (2.100) (L_1 заменить на внешний масштаб, а l — на какой-то меньший). Такое рассуждение, однако, неверно. Турбулентный коэффициент D_T для поля масштаба l (от пульсаций с $kl > 1$) будет по порядку величины равен $\frac{1}{3} \nu l$, в то время как коэффициент Φ от меньших масштабов есть (самое большее) $\frac{1}{3} \nu_k k^{-1}$. Но для колмогоровской турбулентности (см. подразд. 2) и для турбулентности с перемежаемостью (см. подразд. 3) величина $\frac{1}{3} \nu l$ всегда больше, чем $\frac{1}{3} \nu_k k^{-1}$. Поэтому все попытки использовать α -эффект для мелкомасштабных магнитных полей оказались безрезультатными.

Конвекция и дифференциальное вращение. Дифференциальное вращение в звездах вызывается действием конвекции. В невращающейся среде турбулентная конвекция приводит только к

турбулентной вязкости (см. гл. IV). Как правило, конвекция в звездах имеет место при больших числах Рейнольдса, а потому носит турбулентный характер. При наличии вращения на движение действует кориолисова сила $2[\mathbf{v}\Omega]$. Реакция турбулентности на движение определяется уравнением движения

$$\partial u_i / \partial t - \chi \Delta u_i + \rho^{-1} \partial p / \partial x_i + 2 \varepsilon_{ijf} \Omega_j u_f = \partial_j \langle u_j u_i \rangle - \partial_j u_j u_i. \quad (2.101)$$

Здесь мы воспользовались полным уравнением (1.24) с учетом кориолисовой силы и с $\mathbf{H} = 0$ и вычли из него усредненное:

$$\partial V_i / \partial t + \partial_j \langle u_i u_j \rangle + \rho^{-1} \partial \langle p \rangle / \partial x_i - \chi \Delta V_i = 0, \quad (2.102)$$

$\mathbf{V} = [\Omega \mathbf{r}]$. Задача состоит в вычислении тензора турбулентных напряжений $\langle u_i u_j \rangle$ в (2.102). Для этого (2.101) умножается на u_j и уравнение для u_j — на u_i , два уравнения складываются и усредняются. Третьи моменты, возникающие в правой части (2.101), заменяются на $-\tau^{-1} \langle u_i u_j \rangle$ (τ — релаксация). Это приближение мы более подробно обсудим в гл. IV. Здесь мы сообщим лишь результаты.

Без кориолисовой силы, как сказано, реакция турбулентности сводится лишь к турбулентной диффузии. Легко видеть, что кориолисова сила дает вклад в тензор $\langle u_i u_j \rangle$ следующего вида:

$$\tau (\varepsilon_{ifm} \langle u_m u_j \rangle + \varepsilon_{jfm} \langle u_m u_i \rangle) \Omega_j. \quad (2.103)$$

Ясно, что в изотропном случае $\langle u_m u_j \rangle = 1/3 \delta_{mj} \langle u^2 \rangle$ тензор (2.103) обращается в нуль, и никакого эффекта нет. Если же имеется избранное направление (для конвективных оболочек звезд естественным избранным направлением является радиальное), то (2.103) дает неисчезающий вклад. Считается, в частности, что $\langle u_r^2 \rangle \neq \langle u_\theta^2 \rangle = \langle u_\phi^2 \rangle$ (впрочем, для согласования с наблюдениями требуется, чтобы имелось не одно избранное направление, см. [58]). Если тензор (2.103) не обращается в нуль, то он дает вклад в (2.102) аналогично α -эффекту в уравнении (2.67), т. е. он генерирует дифференциальное вращение. Аналогия, однако, неполная: из уравнения (2.67) следует экспоненциальное усиление поля \mathbf{V} , в то время как экспоненциальное нарастание Ω невозможно. Дело в том, что полный момент звезды должен сохраняться. Но генерация дифференциального вращения действительно возможна.

Вопрос о дифференциальном вращении связан с динамо не только этой аналогией. При расчете динамо-уравнений важно знать, каково изменение Ω с глубиной: возрастает Ω или убывает. Необходимо знать, имеется ли меридиональная циркуляция или глобальная конвекция. Относительно последней можно сказать следующее. В быстро вращающейся среде (число Россби малó) конвекция становится двумерной. Ячейки представляют из себя валы, вытянутые вдоль оси вращения.

К настоящему времени существуют два типа теорий конвективной зоны Солнца. Первая теория учитывает взаимодействие глобальной конвекции с вращением. Считается тем самым, что

глобальная конвекция существует. Турбулентная конвекция служит в этой теории для перенормировки молекулярной вязкости χ в уравнениях движения (последняя считается турбулентной). Итак, рассматриваются сравнительно простые уравнения с турбулентной вязкостью и крупномасштабными течениями: вращением и глобальной конвекцией.

Вторая теория изложена выше: считается, что глобальная конвекция отсутствует на Солнце и рассматривается взаимодействие вращения с турбулентностью. К настоящему времени выполнено большое количество расчетов, написано много обзоров на эту тему. Согласно Дарни [59], нет ни наблюдательных, ни теоретических данных, подтверждающих наличие гигантской конвекции на Солнце. Дело в том, что в верхней части конвективной зоны число Россби велико и влияние вращения слабо. Здесь двумерные валы не могут образовываться. В глубине конвективной зоны число Россби мало, но не очень: оно порядка 0,3. Это все же не слишком малая величина, чтобы считать, что вращение радикальным образом модифицирует конвекцию. Кроме того, образованию очень уж глубоко сидящих ячеек препятствует весьма большой перепад плотности в солнечной конвективной зоне (пять-шесть порядков). Заметим, что если двумерные валы все же существуют на Солнце, то они способны генерировать магнитное поле (см. гл. I, подразд. 7). Добавим в этой связи, что аналогичная генерация может быть вызвана более «традиционными» конвективными ячейками типа торoidalного вихря [27]. Последние тоже способны объяснить солнечный цикл [60].

Гигантская конвекция, по-видимому, все же отсутствует в глубине конвективной зоны. Проявлением конвекции является грануляция и супергрануляция на поверхности Солнца. В глубине конвективной зоны ячейки становятся гигантскими по размерам (вероятно, всего раза в три меньше всей конвективной зоны), но все же не двумерными. Согласно Дарни [59], необходимо учитывать не только действие кориолисовой силы на движение, но также и стабилизирующий эффект вращения и изменение формы конвективных элементов, происходящее в результате взаимодействия их с вращением.

Недостатком описанного подхода является специально заданная анизотропия конвективных ячеек. Естественно предполагать, что она есть, но все же она не следует из первопринципов. В работе [61] анизотропия *вычисляется*. Более конкретно, вычисляется параметр s , введенный Киппенханом [62]; $s \langle u_r^2 \rangle = \langle u_\theta^2 \rangle = \langle u_\phi^2 \rangle$. При $s = 1$ имеет место изотропия, и дифференциальное вращение не генерируется. От знака $s - 1$ зависит закон изменения Ω с глубиной. Вместе с тем согласно (2.92) закон изменения Ω очень важен для выяснения динамики магнитного поля. Анализ показал (см., например, обзор Стикса [63]), что теория динамо не согласуется с теорией дифференциального вращения. Для согласования динамо-уравнений (2.91), (2.92) с наблюдаемым поведением магнитных полей необходим один знак $s - 1$, а для теории диф-

ференциального вращения — противоположный. Согласованность этих двух теорий возможна при учете результата работы [61]: величина $s - 1$ меняет знак с глубиной. На поверхности Солнца знак $s - 1$ согласуется с тем дифференциальным вращением, которое наблюдается. В глубине конвективной зоны знак $s - 1$ меняется, и это уже существенно для генерации магнитных полей. Последние генерируются именно в глубине конвективной зоны и затем всплывают на поверхность.

10. Механизм Паркера динамо-эжектора магнитного потока

Поля промежуточных масштабов. В данной главе рассматривались поля, масштаб которых L много больше масштаба движения l . В следующей главе мы рассмотрим мелкомасштабные поля $L \leq l$. Интересную физику дают поля, масштаб которых мы будем называть промежуточным. Объясним, что понимается под такими полями. Рассмотрим плоский слой проводящей жидкости высотой λ (ось z перпендикулярна поверхности слоя, т. е. направлена вертикально) и неограниченный в плоскости XU . Магнитное поле будет меняться по вертикали на расстоянии λ , в то время как в плоскости XU оно меняется слабо, или оно даже однородно, т. е. не зависит от x и y . Будем считать, что движение жидкости представляет собой ячейки размером $l \approx \lambda$ как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении. Ясно, что в вертикальном направлении масштабы магнитного поля и движения сравнимы, в то время как в горизонтальном масштаб поля гораздо больше масштаба движения. Отсюда и название: промежуточные масштабы.

В принципе можно проводить усреднение по поверхности XU , т. е. усреднять по ячейкам, но оставлять везде зависимость от z . Тем самым и выделится крупномасштабная (в плоскости XU) составляющая магнитного поля, если даже в процессе генерации возникнут и мелкомасштабные магнитные поля. В этом отношении постановка задачи близка к изложенной в этой главе — только необходимо учитывать сильную неоднородность скорости по z . С другой стороны, можно ставить задачу динамо в каждой ячейке с периодическими граничными условиями. Это возвращает нас к постановке, изложенной в гл. I, подразд. 4, 5: ведь периодичность граничных условий тоже исключает внешний источник — необходимое условие для формулировки проблемы динамо. В гл. I, подразд. 5, говорилось о том, что масштаб поля динамо-решения гораздо меньше, чем l . Это так, но из этого не следует, что поле не содержит также и не слишком мелкие масштабы порядка l и что средний поток поля равен нулю! В рассматриваемой в этом подразделе постановке задачи ищутся именно такие поля, т. е. поля масштаба l . В этом отношении поля являются уже не крупномасштабными, поскольку в вертикальном направлении они меняются на длине l .

Строгий подход для высокопроводящей плазмы не разработан для полей промежуточного масштаба. Здесь пока можно пользоваться только качественным описанием динамики полей либо считать определенные модели. В частности, тут хорошо работает импульсная модель, изложенная в гл. I, подразд. 7, поскольку на этапе, когда движение выключено, легко выделяются поля промежуточных масштабов. Паркер широко использует импульсную модель в расчетах [64].

Другой способ описания динамики полей состоит в использовании теории возмущений для слабопроводящей плазмы. Напомним, что под высокопроводящей плазмой мы понимаем такую, у которой $R'_m \gg 1$. В слабопроводящей плазме $R'_m \ll 1$, и малый параметр теории возмущений есть число R'_m . Однако, для того чтобы поле скорости существенно сказалось в данной задаче на магнитном, необходимо все-таки, чтобы $R'_m \gtrsim 1$. Поэтому в принципе необходимо учитывать высокие порядки (выше второго) по степени R'_m . Обычно ограничиваются третьим порядком по R'_m , и он является наименьшим возможным. Здесь мы приходим к выявлению тесной связи между полями промежуточных масштабов и полями промежуточных чисел $R'_m \gtrsim 1$. Эта связь более очевидна, если изменить постановку задачи при $R'_m \gtrsim 1$. Если это условие выполняется, то можно рассматривать истинно крупномасштабные поля, т. е. положить вертикальный размер проводящего слоя $\lambda \gg l$. Тогда все результаты, полученные в высокопроводящем пределе ($R'_m \gg 1$), для полей промежуточных масштабов относятся к истинно крупномасштабным полям ($L, \lambda \gg l$), но с промежуточными числами $R'_m \gtrsim 1$. Работать с такими промежуточными числами в строгой постановке задачи можно только в рамках марковской модели, ибо применимость последней не зависит от величины числа R'_m .

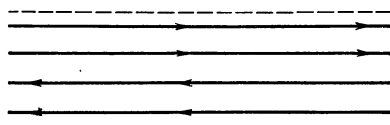
Примером процесса промежуточного масштаба является топологическая накачка (см. подразд. 9). Мы отмечали, что топологическая накачка возможна только при наличии конвективных ячеек размером во всю толщину конвективной зоны. Рассматриваемый в этом подразделе проводящий слой и есть модель конвективной зоны. Отмечалось также, что если конвективные ячейки расположены слоями, то накачка будет только внутри слоя, глобальной (на всю толщину зоны) не будет. Но в подразд. 9 речь шла о высокопроводящем пределе $R'_m \gg 1$. Если $R'_m \gtrsim 1$, то поля, сконцентрированные на дне одного слоя из-за накачки в нем, будут диффундировать вниз и там захватываться нижним слоем и снова подвергаться накачке. Конечная диффузия дает возможность глобальной накачке даже при $\lambda \gg l$, т. е. если высота ячеек меньше толщины зоны. Строгое рассмотрение такого процесса затруднительно: разложение по R'_m требует учета членов высокого порядка, ибо при $R'_m \ll 1$ слишком сильна диссипация и накачка проявляется весьма слабо.

Нельзя сказать, что в солнечной конвективной зоне изучение динамики поля при промежуточных $R'_m \gtrsim 1$ не имеет смысла ввиду очень больших реальных чисел R'_m . Дело в том, что если рассматривать наиболее крупные ячейки, то можно говорить о турбулентном коэффициенте диффузии D_T , возникающем из-за действия более мелких ячеек. По этим более мелким ячейкам можно провести усреднение и работать уже с крупными ячейками, причем эффективное число R'_m , подсчитанное по D_T , не будет большим.

Рис. 2.3.

Начальная конфигурация поля

Сплошные линии — силовые линии поля, штриховые — границы слоя



Будет ли все-таки иметь место при этом топологическая накачка, сказать трудно ввиду упомянутой сложности расчетов при $R'_m \gtrsim 1$. Заметим в этой связи, что диамагнитная накачка (или, как мы привыкли говорить, перенос поля), о которой говорилось в подразд. 9, и особенно сильная накачка поля из-за большого градиента плотности (в нелинейной постановке задачи см. гл. IV, подразд. 7) имеют место в высокопроводящей среде для истинно крупномасштабных полей.

Другим примером процесса промежуточного масштаба является отрицательная диффузия, т. е. коэффициент $D_T < 0$ (в трактовке Паркера [64]). Рассмотрим начальную конфигурацию поля в нашем проводящем слое с противоположно направленными полями (рис. 2.3). При подъеме конвективного элемента силовые линии искривляются (рис. 2.4). Допустим, что, кроме того, ячейка поворачивается на угол $\pm\pi$ (рис. 2.5). Сверху появляется поле со знаком противоположным нижнему. Рассмотрим эффект многих рядом стоящих конвективных ячеек, ведущих себя так же, как описанная. Очевидно, что поля с боковых сторон рядом расположенных ячеек имеют обратные знаки. Если теперь учесть эффект конечной диссипации, состоящий в отделении данной петли от начального поля и слиянии петель, то, очевидно, мы получим, что «боковые» магнитные поля каждой ячейки аннигилируют, внизу поле остается прежним, а сверху возрастет (поскольку начальное поле сверху имеет знак, противоположный нижнему). Опускающиеся и поворачивающиеся на угол $\pm\pi$ ячейки усилят нижнее поле. В результате все поле в проводящем слое усилится.

Мы говорим именно об отрицательной диффузии, а не о генерации, поскольку здесь усиливается существенно неоднородное поле. Если в начальный момент поле во всем слое одного знака, то описанное движение не приведет к усилению поля. Важно иметь в виду, что направление поворота поля не имеет значения, поэтому мы и пишем: поворот на угол $\pm\pi$. Следовательно, этот

эффект не связан с гиротропностью: правый или левый винт характерен для движения — это не имеет значения. Отметим, что в модели Дэвиса, упоминаемой в гл. I, подразд. 7, тоже несущественно, в какую сторону поворачивать начальный тор, когда он превращается в «восьмерку» (на угол π или $-\pi$).

Теперь необходимо понять, почему указанное явление относится к разряду процессов промежуточного масштаба. Дело в том,

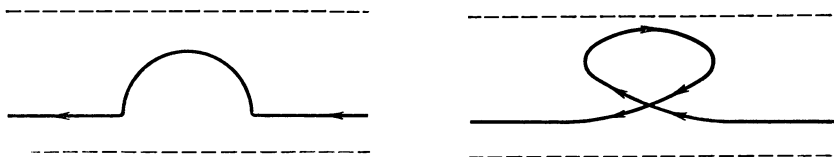


Рис. 2.4.

Первый этап эволюции поля (изображено поле только одной ячейки)

Рис. 2.5.

Поле после поворота петли

что если ячейки малы по сравнению с высотой проводящего слоя λ , то на размере ячеек поле будет квазиоднородным и, как сказано выше, усиления не будет. Именно по этой причине в строгой постановке задачи, изложенной в данной главе, мы получаем положительный коэффициент диффузии D_T . Но, с другой стороны, мы пользовались пределом высокой проводимости: $R'_m \gg 1$. На основании изложенных здесь рассуждений можно ожидать появления отрицательного D_T при $R'_m \gtrsim 1$. Иначе говоря, отрицательный коэффициент D_T не появится, как ожидается в [65], в высокопроводящем пределе в разложении скорости по степеням, поскольку в точной постановке задачи мы не получили $D_T < 0$. Но отрицательный коэффициент D_T может возникнуть при $R'_m \gtrsim 1$ при учете членов ряда теории возмущений по степеням R'_m выше второго порядка.

В этой связи отметим, что отрицательная вязкость при наличии двумерной турбулентности тоже появляется, когда масштаб течения близок к масштабу турбулентности, т. е. нет разделения масштабов (см. подразд. 1). И это явление — промежуточного масштаба. Вернемся к картине ячеек в конвективной зоне, имеющих разный масштаб, когда более мелкие ячейки служат только для перенормировки коэффициента диффузии. Теперь для крупных ячеек эффективное число R'_m не будет слишком большим. Возникнет ли в этом случае отрицательная диффузия в масштабе крупных ячеек, а значит, и генерация поля в этих масштабах? Ответ на этот вопрос в настоящее время может дать только техника ренормализационной группы, речь со которой пойдет в гл. IV, подразд. 3.5. Именно при таком подходе и проводится усреднение по всем масштабам, меньшим k^{-1} , когда нас интересуют коэффициенты генерации и диффузии в масштабе k^{-1} . Как мы

увидим далее, ответ получается отрицательным: коэффициент D_T строго положителен, генерация поля происходит только за счет α -эффекта, т. е. в больших масштабах. С другой стороны, в гл. III мы увидим, что генерация поля все-таки происходит в масштабах ячеек, но это явление уже не может быть классифицировано в терминах отрицательного коэффициента диффузии, ибо генерация вызывается ячейками тех же масштабов, что и генерируемое поле.

Учет выброса магнитных трубок. Перейдем к изложению нового механизма Паркера, названного автором динамо-эжектором магнитного потока. Для этого вернемся к рис. 2.3—2.5. Модифицируем изображенную на этих рисунках модель следующим образом. Во-первых, полагаем, что начальное поле одного знака в противоположность рис. 2.3, где изображены поля разных знаков. Во-вторых, считаем, что опускающаяся жидкость не подвергается вращению. Наконец, в-третьих, учтем «эжекцию» полей на верхней поверхности нашего проводящего слоя. Имеется в виду предложенная Паркером [66] модель всплывания и опорожнения магнитной силовой трубки. Считаем, что выше проводящего слоя расположен вакуум. Силовая трубка выходит на поверхность, далее она начинает подниматься над поверхностью в виде арки, а проводящая плазма стекает обратно в проводящий слой. В конце концов поле выше слоя станет бестоковым (вакуумным), а верхняя граница слоя вернется в свое прежнее положение.

Рассмотрим, каким образом будет эволюционировать поле. Рис. 2.4, 2.5 по-прежнему описывают эволюцию нижней части силовой трубки. Учтем теперь выброс верхней части трубки. Поле там направлено обратно нижнему. После выхода трубки с обратным полем на поверхность и дальнейшего выброса ее внутри слоя останется поле одного знака. Рассмотрение рис. 2.5 показывает, что поле нижней части магнитной петли направлено в ту же сторону, что и начальное. Это говорит о том, что после отщепления и слияния петель поле в нижней части проводящего слоя усилится. (В предыдущем вопросе мы не обращали на это внимание, но это дополнительное усиление поля тоже давало свой вклад в отрицательный коэффициент диффузии). Итак, общий магнитный поток внутри слоя возрастает за счет выхода потока обратного знака. Опускающаяся жидкость, как сказано, не вращается, поэтому она просто переносит магнитный поток сверху вниз. Эволюция поля свелась к двум эффектам: усилению магнитного потока внутри слоя и накачке (переносу) поля в нижнюю часть слоя.

Мы можем несколько модифицировать модель, отказавшись от эжекции. Расположим плохопроводящий слой сверху высокопроводящего, причем толщина плохопроводящего слоя тоже λ . Тогда верхняя часть магнитной петли, подходя к поверхности высокопроводящего слоя, будет проникать в плохопроводящий слой и там быстро диссипировать. В результате поле знака, обратного основному потоку, быстро исчезает из системы, и поток внутри

высокопроводящего слоя возрастает. Указанный механизм динамо есть, очевидно, процесс промежуточного масштаба. Если описанные ячейки малы, $l \ll \lambda$ и $R'_m \gg 1$, то накачка имеет место внутри каждого слоя ячеек, а генерация отсутствует. При $R'_m \gtrsim 1$ можно ожидать как переноса поля на дно проводящего слоя, так и явления отрицательной диффузии (т. е. в конечном счете генерации), вызываемого поднимающимися ячейками. Не случайно Паркер считает, что такой механизм может осуществляться наиболее крупными конвективными ячейками конвективной зоны Солнца (размер 10^{10} см, сравнимый с толщиной зоны).

Паркером указана и другая возможность работы данного механизма. Пусть слой ячеек указанного выше свойства имеет малую толщину ($l \ll \lambda$) и расположен на самом верху проводящего слоя (конвективной зоны). Тогда этот слой ячеек будет создавать особые граничные условия для нижележащего поля, вызывающие генерацию поля. Проводимость нижележащего слоя не должна быть слишком высокой (в противном случае поле будет сконцентрировано в тонком скин-слое у самой поверхности (верхней) зоны). Таким образом, и эта модель соответствует не слишком большим числам R'_m , или, что эквивалентно, полям промежуточного масштаба.

Более глубокое понимание механизма Паркера мы получим, если вернемся к методу усреднения всех величин, используемому в данной главе. Непосредственное усреднение основного уравнения приведет к необходимости вычисления среднего вектора $\langle [vH] \rangle$. Как его сконструировать? Очевидно, все, что можно написать, это $\langle [vH] \rangle = \alpha B + [v_I, B] - D_T \text{rot } B$, остальные векторы должны содержать более высокие производные по магнитному полю и в случае крупномасштабных полей B быть малыми. Первый член правой части соответствует α -эффекту и в рассматриваемом случае исключается (система не гиротропна). Второй член соответствует переносу поля, третий — диффузии. Откуда же можно получить генерацию по новому механизму Паркера? Из этого выражения ее получить невозможно. Вспомним теперь, что выписанное выражение годится лишь для крупномасштабных полей. Это говорит о том, что в указанном механизме имеет место генерация поля промежуточного масштаба.

С этим обстоятельством связано уникальное свойство динамо-уравнений Паркера. Как мы видели из рис. 2.3—2.5, за время оборота ячейки *усиливается одна компонента поля*. Вертикальная составляющая остается неизменной, а поля $\{H_x, 0, 0\}$, $\{0, H_y, 0\}$ не взаимодействуют друг с другом и усиливаются независимо. Во всех моделях динамо-усиление поля происходит в два этапа. Так, в старой (традиционной) модели Паркера (см. гл. I, подразд. 7) полоидальное поле в совокупности с дифференциальным вращением возбуждает тороидальное поле, ортогональное полоидальному. Далее α -эффект генерирует опять полоидальное поле из тороидального. Те же два этапа усиления имеют место при отсутст-

вии дифференциального вращения, т. е. при α^2 -динамо. В новом механизме самоусиление происходит без генерации ортогонального поля, потому-то и усиливается каждая компонента поля (кроме H_z) независимо. В постановке задачи на собственные значения (см. гл. I, подразд. 5) и усреднений только по горизонтальным поверхностям мы имели бы $\langle \text{rot} [v\mathbf{H}] \rangle \sim \gamma \langle \mathbf{H} \rangle$, где каждая компонента поля выступает независимо. Отсюда мы опять возвращаемся (на новом уровне) к утверждению, что рассматриваемый процесс — промежуточного масштаба. В сущности такое усреднение фактически уже не разделяет масштабы, и можно снять угловые скобки в выписанном выражении, ибо поля, лежащие в плоскости XU , можно считать зависящими только от z .

Итак, динамо-уравнения могут быть выписаны для каждой компоненты поля отдельно. Уравнение для H_x -компоненты с учетом накачки поля на дно зоны

$$\partial H_x / \partial t + \partial_x V_D H_x = D \partial^2 H_x / \partial z^2. \quad (2.104)$$

Здесь V_D есть z -компонента скорости переноса $V_D = \{0, 0, V_D\}$, перенос осуществляется только в вертикальном направлении. Пусть на самом верху зоны имеется тонкий слой ячеек малого размера ($l \ll \lambda$) с описанными выше свойствами, т. е. они приводят к накачке поля к основанию этого тонкого слоя и генерации потока поля определенного знака. Поле противоположного знака выбрасывается в вакуум. Можно сказать, что этот тонкий слой запирает поле одного знака, толкая его вниз, в то время как поле противоположного знака вниз не проникает. Иначе говоря, этот слой можно рассматривать как фильтр, отражающий поле одного знака, проникающее в этот слой снизу и не пропускающее поля противоположного знака, которые возникают выше границы, разделяющей этот слой от остальной зоны. Граничные условия на этой поверхности сводятся таким образом просто к условию отражения $\partial H_x / \partial z = 0$. Снизу проводящей зоны граничные условия определяются отсутствием потока под зоной, т. е. снизу зоны среда сверхпроводящая. Это соответствует на нижней границе $V_l H_x = D \partial_z H_x$ (условие получается, как обычно, интегрированием (2.104) по переходному слою). Выписанные граничные условия однородные, и уравнение (2.104), имея вид уравнения переноса тепла, казалось бы, ни в коем случае не должно иметь растущие решения. Фактически это есть основной способ доказательства антидинамо-теорем: если одна из компонент поля отделяется, то она обычно и имеет вид уравнения теплопроводности. Поскольку «генерация» температуры (без внешних источников тепла) противоречит термодинамике, рост магнитного поля невозможен (см. гл. I, подразд. 6). Однако, как показал Паркер, и в этом легко убедиться, уравнение (2.104) с постоянными V_D и D и выписанными граничными условиями дает динамо. Можно и непосредственно показать, что интегрирование этого уравнения по всей толщине зоны и интегрирование этого же уравнения, умноженного на H_x , тоже по всей зоне не приводит к неравенствам

$\frac{\partial}{\partial t} \int H_x dz < 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \int H_x^2 dz < 0$, которые в гл. I, подразд. 6, обосновывали антидинамо-теоремы. В чем же дело, почему уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями дает динамо? Дело в том, что согласно (2.104) имеется приток «тепла» на верхней границе зоны, поскольку там величина V_D не обращается в нуль.

Можно вообще исключить перенос поля в основной зоне, оставив сверху в тонком слое толщиной $l \ll \lambda$ ячейки с описанными выше свойствами. Тогда в основной зоне $V_D = 0$ и (2.104) превратится в уравнение диффузии. В тонком слое сверху, где расположены ячейки, имеется и перенос и генерация поля. Все это учитывается в граничном условии для (2.104). Оно выводится из непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля

$$D \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{(1)} = D \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{(2)} - V_D H_x \Big|_{(2)}.$$

Индекс (1) относится к полю основной зоны, а (2) — к полю верхнего слоя. Интегрируем уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\sigma c^{-1} (\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{V}_D \mathbf{H}])$ по верхнему слою: $H_x \Big|_{(2)} = H_x \Big|_{(1)} \left[\exp D^{-1} \int_{\lambda-l}^{\lambda} V_D(z) dz \right]$, интегрирование проводится в показателе экспоненты по слою. Такая граничная задача тоже приводит, как показал Паркер [64], к динамо-решению.

Обсудим условия для действия нового динамо-механизма Паркера. Прежде всего, если ячейки поворачиваются на угол $\pi/2$, то имеет место α -эффект, а указанный механизм не работает. Если они поворачиваются на больший угол, т. е. π (или $-\pi$), то α -эффект выключается и работает механизм Паркера. Это дало основание Паркеру предположить, что описанный им механизм более эффективен в быстро вращающихся звездах, где вращение ячеек, как можно ожидать, происходит более интенсивно по сравнению с медленно вращающимися звездами. Как теперь обеспечить второе условие действия механизма Паркера: осуществление вращения только поднимающимися ячейками? В принципе это возможно. Если, например, полагать, что поднимающаяся жидкость расположена в центре ячейки, то сверху она растекается на периферию и по периферии ячейки опускается. Очевидно, что поднимающаяся и опускающаяся части жидкости находятся в разных условиях. Предположим, что жидкость в нижней части зоны имеет слабый начальный вращательный момент (вокруг вертикальной оси). Поднимаясь по сравнительно узкой центральной части ячейки и сохраняя этот момент, жидкость вынуждена вращаться же не с малой, вообще говоря, угловой скоростью. При опускании же жидкости такого закручивания не происходит.

Неожиданные и удивительные следствия нового механизма Паркера для астрофизики! Очевидно, что он может регенерировать

полоидальное поле без возбуждения тороидального. Но неожиданным оказывается то, что выходящие поля имеют знак, противоположный глубинным. Если, например, в глубине конвективной зоны Солнца работает обычное $(\alpha - \omega)$ -динамо и генерируется тороидальное поле, а сверху зоны работает механизм динамо-эжектора, то полярность выходящих на поверхность полей обратная тороидальному полю. Не менее неожиданным является заключение о связи этого механизма с солнечными вспышками. Дело в том, что часть токов и магнитной энергии выброшенных магнитных трубок будет диссипировать в хромосфере и короне, вызывая вспышки. Выше говорилось о том, что трубка выбрасывается с плазмой и затем опорожняется: плазма стекает вдоль силовых линий. В конце концов конфигурация поля должна стать бестоковой. Но далеко не всегда начальная сложная конфигурация может непрерывным образом перейти в бестоковую. Она может обладать такой топологией, что переход ее в бестоковую непременно сопровождается «пересоединением» силовых линий, что возможно только при включении значительной диссипации. Это и приведет к вспышке.

11. Магнитные поля в высокопроводящей плазме

Читателя, вероятно, удивит такое название подраздела: ведь до сих пор говорилось именно о высокопроводящей плазме. В этом подразделе разобраны все тонкости и трудности, которые возникают. Надо, впрочем, оговориться, что большинство дискуссий по этому предмету связано не с реальными трудностями, а скорее с недоразумениями. Мы поэтому охватим в основном те вопросы, которые вызывают наибольшую дискуссию. Часть из них уже обсуждена в книге [1], и если мы опять их здесь затронем, то только для связности изложения.

Марковская модель. Мы уже упоминали о ней в подразд. 7. Речь идет о случае $R'_m \gg 1$, но $\varepsilon = \tau v/l \ll 1$. Приближенное решение (1.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) = & \mathbf{H}(0) + \int_0^t \text{rot} [\mathbf{v}(t_1) \mathbf{H}(0)] dt_1 + \\ & + \int_0^t \int_0^{t_1} \text{rot} [\mathbf{v}(t_1) \text{rot} (\mathbf{v}(t_2) \mathbf{H}(0))] dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Выписанных членов достаточно. Теперь следует усреднить (2.105) почленно, полагая, что $\mathbf{H}(0)$ не коррелирует с $\mathbf{v}(t)$, $t > 0$. Подчеркнем, что $\mathbf{H}(0)$ не следует считать чисто крупномасштабным. Иначе говоря, $\mathbf{H} = \mathbf{B}(0) + \mathbf{h}(0)$, только $\mathbf{h}(0)$ не коррелирует с $\mathbf{v}(t)$. Главные заблуждения начинаются именно из игнорирования этого момента. Поле $\mathbf{H}(0)$ полагают крупномасштабным, далее возникает мелкомасштабная составляющая \mathbf{h} , которая в

конце концов становится не меньше по амплитуде, чем $\mathbf{H}(0)$. На этом основании полагают процедуру обрывания ряда (2.105) на втором члене (как он выписан) нестрогой.

В действительности рост величины h происходит не только как следствие выражения (2.105) с полем $\mathbf{H}(0)$, содержащим крупномасштабную составляющую. Как мы увидим в гл. III, даже в случае $\langle \mathbf{H}(0) \rangle = 0$, т. е. крупномасштабная составляющая отсутствует, поле h тем не менее растет. Итак, подчеркнем еще раз, что выражение (2.105) не является разложением по h/B , это есть разложение по $\varepsilon = \tau v/l$. Действительно, оценивая второй член правой части, мы видим, что он порядка $H(0)\tau v/l$, третий — порядка $H(0)\tau^2 v^2 l^{-2}$. Следующий момент — это выход на универсальный режим. Он наступает при $t \gg \tau$. При усреднении получаем

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(0) + t D_T \Delta \mathbf{V}(0), \quad (2.106)$$

$$D_T = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+s) \rangle ds \text{ (полагаем, что имеем дело с ОИТ).}$$

Беря производную от (2.106) по времени, получаем уравнение диффузии. Выражение (2.106) дает верхнюю границу для t : второй член правой части должен быть малым по сравнению с первым (иначе опять теория возмущений станет некорректной). Итак, должно выполняться

$$\tau \ll t \ll (L^2/D_T) = (L^2/3v^2\tau). \quad (2.107)$$

Эти неравенства непротиворечивы. Собственно, здесь мы обосновали строгость описания марковского процесса (который не нуждается в обосновании!).

Волновой процесс. Волновой процесс представляет особый случай в теории динамо. Действительно, если $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \exp i\omega_0 t$, то (1.7) в пределе высокой проводимости ($D = 0$) дает точное решение в виде $i\omega_0 \mathbf{h}_1 \exp i\omega_0 t = \partial \mathbf{h}/\partial t = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$; \mathbf{h}_1, \mathbf{B} не зависят от времени. Формально это видно из (2.106): корреляционная функция по времени есть просто $v_1^2 \cos \omega_0 s$ и интеграл расходится. Здесь также ясно, что «время памяти» в этой системе отсутствует: корреляция, пропорциональная $\cos \omega_0 s$, бесконечно долго помнит о своем начальном значении.

В слабопроводящей среде ($R'_m \ll 1$) время памяти обусловлено только диссипацией, т. е. l^2/D . Конечно, это — время памяти магнитного поля, а не движения. Но тем не менее в слабопроводящем пределе коэффициенты D_T и α вычисляются строго для волнового процесса. Такой подход широко используется в теории геодинамо. Так, Брагинский [2] предложил рассматривать волны с учетом магнитной, архимедовой и кориолисовой сил (МАК-волны). Генерация поля получается, если в задаче имеется псевдоскаляр. Кроме псевдовектора $\mathbf{\Omega}$, необходимо иметь истинный вектор. В (2.17) истинным вектором является $\nabla \rho$. Для волнового процесса избранным направлением является волновой вектор \mathbf{k} и $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle \sim$

$\sim k\Omega$. В [67] показано, что волны возбуждают магнитное поле даже без избранного волнового вектора k . Фактически псевдоскаляр (см. [67]) образовывается как в (2.17) (он пропорционален $\Delta r\Omega$). Интересно отметить, что сама величина $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ обращается в нуль (см. [67]), но α -эффект остается. Это связано с тем, что α не просто пропорционально $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$. Для марковского процесса, например, $\alpha = -1/3 \int_0^{\infty} \langle \mathbf{v}(t) \text{ rot } \mathbf{v}(t+s) \rangle ds$. Величина не обязана обращаться в нуль, если $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle = 0$.

Итак, чисто волновой процесс в высокопроводящей среде не вызывает динамо. Это, впрочем, очевидно: движение носит колебательный характер, магнитное поле, вмороженное в среду, тоже просто осциллирует без всякой эволюции. Более интересен случай волн со сбоем фаз, т. е. волн, тоже имеющих время памяти, например, волны в солнечной атмосфере и короне генерируются в нижних слоях фотосферы и в конвективной зоне. Конечно, они приходят в атмосферу Солнца не чисто плоскими и когерентными. Другой пример — взаимодействующие волны. Взаимодействующие акустические колебания как генератор магнитного поля рассмотрены в работе [17]. Ограничимся далее для конкретности именно акустическими колебаниями. Здесь имеются два характерных периода времени. Первый, естественно, сам период колебания $T_1 = \omega_0^{-1}$. Второй — время сбоя фаз. Обозначим его γ_1^{-1} . Тогда корреляционная функция не будет косинусоидой, $\langle \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t+s) \rangle = v_1^2 \exp(-\gamma_1 s) \cos \omega_0 s$. Теперь интеграл в (2.105) не расходится:

$$v_1^2 \int_0^{\infty} \exp(-\gamma_1 s) \cos \omega_0 s ds = v_1^2 \gamma_1 (\gamma_1^2 + \omega_0^2)^{-1}.$$

Для реальных волн $\gamma_1 \ll \omega_0$ (в противном случае это уже не волны). Взаимодействие волн характеризуется тем, что γ_1 должно быть квадратично по амплитуде: $\gamma_1 \sim v^2$, для акустики $\gamma_1 = \omega_0 M^2$, M — число Маха ($M \ll 1$). Время γ_1^{-1} есть время жизни волн, поэтому его можно считать временем памяти, $\tau = \gamma_1^{-1}$. Ряд (2.105) здесь законным образом обрывается по малому параметру $v/\omega_0 l$, l — характерная длина волны. Вся процедура усреднения оказалась законной, теперь только (2.107) заменяется на

$$\tau = \frac{1}{\omega_0 M^2} \ll t \ll \frac{L^2 \omega_0^2}{v^2 \gamma} = \frac{L^2 \omega_0}{v^2 M^2} = \frac{L^2}{M^4 \omega_0 l^2}.$$

Эти неравенства непротиворечивы. Отметим также, что для обоснования генерации флюктуационных магнитных полей при отсутствующем крупномасштабном поле будем иметь неравенство $\tau = (\omega_0 M^2)^{-1} \ll t \ll \gamma^{-1}$, γ — инкремент нарастания спектральной функции флюктуаций. Согласно [17], $\gamma = M^4 \omega_0$, и эти неравенства тоже оказываются непротиворечивыми.

Рассмотрение взаимодействующих волн в высокопроводящей среде оказывается для теории динамо вполне корректно. Процесс является как бы марковским.

Насколько корректно полагать $D = 0$? При рассмотрении марковского процесса и взаимодействующих волн необязательно полагать D строго равным нулю. Величина D мала, но, строго говоря, в (2.105) ее следует учитывать с помощью функции Грина уравнения теплопроводности (см. подразд. 7). Но при малых D все равно с хорошей степенью точности ряд с учетом конечного D переходит в (2.105). Поэтому здесь всегда можно говорить о малом, но ненулевом D . Но тем не менее все результаты получаются, если положить $D = 0$. Более того, в лагранжевом подходе, где малость параметра $\varepsilon = \tau v l^{-1}$ не используется, диссипацией действительно полностью пренебрегают (точное решение (2.30) имеет место только при $D = 0$).

Есть ли смысл говорить о диффузии поля, его диссипации (для ОИТ) или его генерации (для ОНИТ), если имеет место полная вмороженность? Последняя означает, что число силовых линий сохраняется. Нет ли здесь противоречия и непоследовательности?

Для того чтобы разобрать эти (кажущиеся) парадоксы, следует в первую очередь иметь в виду следующее. Когда речь идет о крупномасштабном поле, мы тем самым как бы проводим спектральную фильтрацию и отбрасываем все мелкомасштабные поля. Наш фильтр пропускает лишь низкочастотные крупномасштабные поля. В идеальной среде с $D = 0$ число силовых линий, конечно, сохраняется. Но в ОИТ, когда происходит диссипация крупномасштабного поля, в действительности силовые линии запутываются и крупномасштабная составляющая переходит во флюктуационную с масштабом l . При наличии генерации в ОНИТ, наоборот, часть энергии мелкомасштабных пульсаций переходит в крупномасштабные. В области малых масштабов, как мы увидим далее, имеет место перекачка энергии в область совсем малых масштабов, где диссипация уже существенна. Но для крупномасштабных полей этот процесс малозаметен. Дело в том, что перекачка пульсационного поля, т. е. поля, которое генерируется мелкомасштабным динамо и существовало бы и без крупномасштабного поля (см. гл. III), гораздо более эффективна, чем перекачка крупномасштабной составляющей поля. Действительно, поток равен

$$\varepsilon_m = \langle H^2 \rangle / \tau = \langle h^2 \rangle v / l \quad (2.108)$$

(ср. с ε в подразд. 2). Поток, идущий из крупномасштабной составляющей, есть

$$B^2 \frac{D_T}{L^2} = \frac{1}{3} B^2 \frac{lv}{L^2}. \quad (2.109)$$

Здесь в качестве времени жизни мы взяли диффузионное время $L^2 D_T^{-1}$. В гл. IV будет показано, что $\langle h^2 \rangle = 4\pi r \langle v^2 \rangle$. Отношение потоков (2.109) и (2.108) есть $1/3 v_A^2 v^{-2} l^2 L^{-2}$, $v_A = B (4\pi r)^{-1/2}$.

Эта величина мала не только по параметру lL^{-1} , но и по $v_A v^{-1}$: при $v_A > v$ (напомним, что v_A есть альфвеновская скорость) пульсации скорости представляют собой волны, и тогда, как сказано в предыдущем вопросе, коэффициент D_T следует писать иначе, и (2.109) несправедливо. Рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего вопроса, приводят к коэффициенту турбулентной диффузии (см. [15]) $D_T = v^2 \gamma_1 \omega_0^{-2}$, $\gamma_1 = \omega_0 M_A^2$, $M_A = v v_A^{-1}$ (M_A — альфвеновское число Маха). Следовательно, поток энергии, идущий из крупномасштабного поля, равен $B^2 D_T L^{-2} = B^2 v^2 \gamma_1 \times L^{-2} \omega_0^2 = B^2 l^2 L^{-2} \omega_0 M_A^4$ (ср. с (2.109)). В то же время поток в область больших волновых чисел из-за нелинейного взаимодействия волн есть $\varepsilon_M = \langle h^2 \rangle \tau^{-1} = \langle h^2 \rangle \gamma_1 = \langle h^2 \rangle \omega_0 M_A^2$, что в $L^2 l^{-2}$ раз больше, чем поток энергии из крупных масштабов (мы учли дополнительно, что $M_A = \langle h^2 \rangle B^{-2}$).

Итак, поток энергии, идущий из крупных масштабов в малые, очень мал (по сравнению с собственным потоком в малых масштабах). Следовательно, можно говорить о перекачке энергии крупномасштабного поля в первую очередь в пульсации масштаба l , при этом полная замороженность сохраняется. Неучет этих факторов привел Моффата [68] к обсуждению еще одного парадокса. Рассмотрим магнитное поле звезды с полем, расположенным в начальный момент в меридиональных плоскостях (рис. 2.6). Оно состоит из замкнутых внутри и вне звезды силовых линий (последние пересекают на рис. 2.6 поверхность). Ясно, что в идеальной среде (бесконечная проводимость, а $D = 0$) сохраняется поток магнитного поля через жидкий контур. Положим теперь, что нормальная к поверхности сферы радиуса звезды скорость v_n обращается в нуль. Тогда, какие бы движения не происходили в звезде, замкнутые внутри звезды силовые линии не смогут перейти в разомкнутые (но замыкающиеся вне звезды). И наоборот, разомкнутые силовые линии не переходят в замкнутые. Такой процесс неизбежно привел бы к нарушению сохранения потока через жидкий контур на поверхности звезды. Поскольку число силовых линий, пересекающих поверхность звезды (т. е. разомкнутых внутри), определяет дипольный момент, то можно утверждать, что при $v_n = 0$ в идеальной среде дипольный момент сохраняется. Такое утверждение является содержанием теоремы Бонди и Голда [69], в этой работе читатель найдет строгое обоснование теоремы. Парадокс же заключается в том, что α -эффект дает согласно системе (2.91), (2.92) генерацию $\langle A_\phi \rangle$ т. е. дипольной составляющей. Результат этот может быть получен и для $D = 0$.

Выход из этого очень прост. Полагая $v_n = 0$, мы тем самым запрещаем турбулентную диффузию поля в радиальном направле-

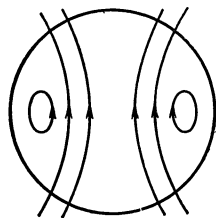


Рис. 2.6.
Полоидальное поле звезды

нии вблизи поверхности. Здесь поэтому необходимо учитывать конечную электропроводность и помнить, что $D \neq 0$. То, что учет конечной электропроводности не приведет к фатальным следствиям (можно было бы опасаться, что это приведет к замедлению процесса динамо, все омические времена ведь очень велики (см. гл. I, подразд. 1)), было показано Крейкнамом [7]. Будем считать, что все движения происходят при $r \leq R_1$, $R_1 < R$, R — радиус звезды. В узком слое толщиной $\Delta = R - R_1$ плазма покоится. Конечно, если считать, что здесь плазма сверхпроводящая, то силовые линии, пересекающие поверхность, вморожены в неподвижное вещество, на них не действует движение нижележащих слоев. Для реальной задачи следует допускать в слое толщиной Δ конечную проводимость. Если теперь уточнить, что Δ — толщина скин-слоя: $\Delta = (D/\gamma)^{1/2}$, γ — инкремент нарастания поля (или характерная частота изменения поля), то поля, генерирующиеся внутри звезды при $r < R_1$, свободно выходят на поверхность, и дипольный момент меняется. Причем в области, где $v = 0$, поля меняются на масштабе Δ .

Интересно отметить, что в этой модели Крейкнама [7], пользуясь нашей терминологией, энергия крупномасштабного поля вблизи границы звезды перекачивается непосредственно в весьма малый масштаб Δ . Величина Δ даже меньше, чем l ! Если отказаться от модели с областью неподвижной плазмы, то можно утверждать, что перекачка энергии поля \mathbf{V} происходит в первую очередь в область масштабов порядка $l \gg (D/\gamma)^{1/2}$, а затем энергия пульсаций перекачивается по спектру вплоть до масштаба $l_1 = (Dl\nu^{-1})^{1/2}$, где сказывается омическая диффузия. Этот новый размер l_1 уже гораздо меньше, чем $(D/\gamma)^{1/2}$.

Вернемся к теореме Бонди и Голда [69]. Казалось бы, можно отказаться от требования $v_n = 0$, теорема все равно останется в силе. Можно допустить движения, нормальные к поверхности и искажающие эту поверхность. Следует только потребовать, чтобы поверхность не возмущалась в среднем, т. е. в среднем оставалась сферической. Такие движения уже недопустимы на поверхности проводящего земного ядра, но вполне возможны на поверхности звезды. Однако Паркером были высказаны весьма остроумные соображения, показывающие, что теорема о сохранении дипольного момента в этом случае не выполняется даже для идеально проводящей среды. Для объяснения этого явления Паркер привлек механизм выброса магнитной трубки, рассмотренный в подразд. 10. Представим себе, что замкнутые силовые линии подходят к поверхности звезды. Часть трубки поднимается далее над поверхностью, причем плазма стекает вдоль силовых линий обратно внутрь звезды. В результате часть магнитного потока оказывается над поверхностью, а внутри часть силовых линий уже замыкается через эту силовую трубку над поверхностью. Значит, они стали разомкнуты внутри звезды, а поверхность звезды сохранилась в виде сферы. Это и приводит к изменению дипольного момента.

ДИНАМИКА МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ПОЛЕЙ

1. Общие замечания

Начнем с замечаний исторического характера. После появления антидинамо-теоремы Каулинга единственной работой, положительно решающей вопрос динамо, была работа Бэтчелора [70]. Речь в ней шла о генерации полей, масштаб которых сравним с масштабами турбулентных пульсаций. В настоящее время мы называем эти поля мелкомасштабными. Но после работы [70] под турбулентным динамо понимали только проблему генерации мелкомасштабных полей. Затем работа Бэтчелора подверглась критике (см. далее), и справедливо считалось, что проблема турбулентного динамо не решена. В дальнейшем положительные результаты получили для динамо магнитных полей небесных тел (см. гл. II). Теперь мы называем эти поля крупномасштабными. Но все еще бытовало мнение, что проблема турбулентного динамо не решена. Путаница эта прекратилась после появления обзора [15], в котором было уже четко сказано, что есть два вопроса: вопрос о генерации крупномасштабного поля и вопрос о генерации мелкомасштабного поля. Но, конечно, уточнение терминологии не продвинуло нас в область решения проблемы мелкомасштабного турбулентного динамо. Эта проблема так и оставалась нерешенной. Единственное строгое решение можно было получить только для акустической турбулентности [17].

Надо сказать, что наблюдаемые мелкомасштабные (или флюктуационные) магнитные поля сильно превышают средние поля. Энергия флюктуационных полей межзвездного газа Галактики примерно на порядок превышает энергию крупномасштабного поля. На поверхности Солнца энергия поля тонкоструктурных образований превышает в тысячи раз энергию среднего поля. Что касается солнечного ветра, то здесь энергия пульсаций и энергия среднего поля сравнимы по порядку величины. Если бы энергия пульсационных полей только перекачивалась в область больших волновых чисел, то само наличие крупномасштабных полей могло бы объяснить энергию пульсационных полей, в лучшем случае равную энергии крупномасштабных полей. Иначе говоря, имело бы место неравенство $\langle h^2 \rangle / 8\pi \lesssim B^2 / 8\pi$, в то время как для космических условий обычно выполняется $\langle h^2 \rangle / 8\pi \gg B^2 / 8\pi$. Заметим, что иногда используется формула $\langle h^2 \rangle = R_m' B^2$, т. е. $\langle h^2 \rangle \gg B^2$, и это для случая отсутствия мелкомасштаб-

ной генерации. Но эта связь относится к весьма мелкомасштабным полям с волновыми векторами $k_1 \gg 2\pi/l$. Поля же с характерными волновыми векторами $k = 2\pi/l$ не могут превышать по амплитуде величину B (см. [1]). Все это служило косвенным указанием на то, что в области малых масштабов имеется не только перекачка энергии в область больших волновых чисел, но также и генерация. Причем генерация более эффективна, чем перекачка (см. подробное обсуждение в [1]).

Чем же обусловлен тот факт, что вопрос о генерации крупномасштабных полей в общем не вызывал сомнений, а проблема мелкомасштабных полей так и оставалась полностью нерешенной? Для ответа на этот вопрос вернемся к уравнению для крупномасштабного поля (2.67). В сущности его можно получить без труда. Правая часть (2.67) есть разложение произвольного оператора по дифференциальным операторам ∂_i (причем оператор линейный, поскольку исходное уравнение (1.7) линейно по \mathbf{H}). Это разложение есть разложение по l/L , что видно из соображений размерности: в любой коэффициент при операторе ∂_i входят лишь характеристики турбулентности, которые ничего «не знают» о масштабе поля B . Положительный знак D_T следует из простых физических соображений. В простейшем случае ОИТ должна приводить в первую очередь к перемешиванию магнитного поля и сглаживанию магнитных неоднородностей, как это происходит со скалярной примесью. Таким образом, получается в ОИТ уравнение диффузии с положительным коэффициентом D_T . Что же касается самих величин D_T и α , то их можно определить (по порядку величины) из соображений размерности. Тогда вопрос о генерации решится однозначно: для полей масштаба $L > D_T/\alpha$ генерация всегда имеет место. Вопрос здесь состоит лишь в уточнении коэффициентов α и D_T . Считается, что по крайней мере с «астрофизической степенью» точности эти коэффициенты хорошо известны, и проблема генерации крупномасштабных магнитных полей решена. Требуется лишь уточнить коэффициенты α и D_T .

С мелкомасштабными полями все обстоит гораздо сложнее. Здесь имеется два конкурирующих процесса. Один из них уже был упомянут ранее — перекачка энергии поля данного масштаба в более мелкие масштабы. Этот процесс вполне аналогичен перекачке энергии скалярной примеси в область больших волновых чисел. Время жизни пульсаций масштаба l из-за распада ее на более мелкие есть l/v . Второй процесс — возрастание магнитного поля из-за растяжения силовых трубок поля. В гл. I, подразд. 2, мы продемонстрировали факт усиления поля при наличии простого движения — дифференциального вращения. То же дифференциальное вращение даст (для неосесимметричной составляющей поля) уменьшение масштаба (гл. I, подразд. 5). Время усиления поля масштаба l тоже порядка l/v . Итак, два конкурирующих процесса имеют одинаковую по порядку величины скорость. Здесь невозможно отделаться оценками из соображений размерности, как для крупномасштабных полей. Необходимо в точном виде

определить скорости этих двух процессов и тогда их сравнивать. Если рост поля при данном волновом векторе k происходит быстрее, чем уменьшается за счет дробления масштабов, то имеет место мелкомасштабное динамо. Если же медленнее, то пульсации поля перекачиваются в область очень больших k и диссипируют из-за омических потерь (или же остаются слабые пульсации, генерирующиеся за счет энергии крупномасштабного поля).

Еще несколько слов о качественной картине поведения турбулентного поля. С одной стороны, магнитное поле стремится увеличиться благодаря растяжению силовых линий. Силовые трубки поля заморожены в проводящую среду. При турбулентном движении две близкие точки в среднем расходятся. Это означает, что силовые трубки растягиваются. Так как количество вещества в трубках должно сохраняться, результатом их растяжения будет сжатие, уменьшение диаметра трубок. Следовательно, поле будет расти (обратно пропорционально квадрату диаметра трубок, так как поток Φ сохраняется). С другой стороны, этот же процесс приводит к сжатию «петель» поля, содержащих противоположно направленные поля. Это приведет к падению масштаба.

Первая попытка решить проблему мелкомасштабного динамо предпринята в упомянутой выше работе Бэтчелора [70]. Автор использовал аналогию между уравнением (1.7) и уравнением для $\text{rot } v$, которое получится, если взять операцию rot от (1.24) (при $\mathbf{H} = 0$ обратным действием поля на движение в кинематической постановке задачи можно пренебречь): $\partial \text{rot } v / dt = \text{rot } [v \text{ rot } v] + \chi \Delta \text{rot } v$. При $D = \chi$ эти уравнения совпадают. В стационарной турбулентности $\langle (\text{rot } v)^2 \rangle$ поддерживается на стационарном уровне. Отсюда Бэтчелор делает вывод, что при $D = \chi$ генерация \mathbf{H} в точности компенсируется омическими потерями и $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ поддерживается на стационарном уровне. При $D/\chi < 1$ омическая диссипация менее существенна, чем генерация, следовательно, поле $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ генерируется. При $D/\chi > 1$, наоборот, происходит лишь диссипация поля.

Критику работы Бэтчелора можно свести кратко к двум замечаниям. Во-первых, поле (\mathbf{a} значит, и $\text{rot } v$) поддерживается на стационарном уровне внешними источниками, без которых турбулентность выродится (тоже за время $l/v!$), в то время как поле \mathbf{H} не имеет внешних источников. Во-вторых, поле \mathbf{H} пассивное, в пределе (1.25), (1.26) оно не влияет на движение, в то время как поле $\text{rot } v$ очевидным образом связано с v . Иначе говоря, нелинейная задача (динамика v и $\text{rot } v$) не сводится к чисто линейной — динамике \mathbf{H} . Исторически работа Бэтчелора сыграла двоякую роль. Она стимулировала развитие теории турбулентного динамо, но долгое время связывала вопрос о турбулентном динамо с величиной D/χ . В действительности же, так же как для немагнитной турбулентности в инерционной области, для магнитной в области, где $R_m \gg 1$, вся динамика процесса и все скорости не должны зависеть от χ (в гидродинамической турбулентности) и от D (в магнитной). Параметр D/χ здесь вообще не причем! Далее мы

еще дополнительно убедимся в том, что вопрос о мелкомасштабном динамо действительно не зависит от этого параметра.

Трудность проблемы заключается в том, что для решения вопроса о динамо пульсационного поля не годятся ни приближенные методы, ни эвристические теории. Отметим попутно, что моделирование этого процесса в лабораторных условиях пока невозможно: величина R'_m для турбулентных движений при этом мала. Численное моделирование трехмерного случайного процесса без каких-либо упрощенных модельных уравнений в настоящее время тоже не представляется возможным. Единственная решаемая модель — это марковский процесс с $\tau \ll l/v$ (акустическая турбулентность тоже решаемая задача, но это уже не модель, а турбулентность специального вида). Но в лучшем случае на марковский процесс можно смотреть как на эвристическую теорию, если параметр $\tau v/l$ не мал (как в реальной турбулентности).

В этом месте нам все же хотелось бы «оправдать» марковский процесс вот с какой стороны. Дело в том, что в работе Краузе [71] утверждается, что марковский процесс вообще не адекватен для описания мелкомасштабного динамо. Мотивировка следующая. Краузе полагает, что величина τ не просто мала, но меньше всех характерных времен в задаче. Тогда, в частности, можно написать $\tau \ll (Dk^2)^{-1}$. Здесь $(Dk^2)^{-1}$, очевидно, время омического затухания поля с волновым вектором k . Но для произвольно больших k это неравенство выполняется только, если $D \rightarrow 0$. Но, как было сказано в гл. I, подразд. 5, динамо поля при $D = 0$ невозможно. Усиление поля всегда носит временный характер при таких условиях. В действительности же величина τ не является наименьшим характерным временем задачи. Для обоснования марковской модели требуется только выполнение условий $\tau \ll l/v$ и $\tau \ll \gamma^{-1}$, γ — инкремент. Для марковской модели $\gamma = \tau (v/l)^2$. С другой стороны, величина γ должна определять масштаб пульсаций (см. в гл. I, подразд. 5, связь между инкрементом $\gamma = |E_m|$ и масштабом (1.37), (1.38)). А именно: $\gamma = Dk_1^2$, k_1 — характерный волновой вектор магнитных пульсаций, при $k \gg k_1$ энергия пульсаций пренебрежимо мала. Итак, $\gamma = \tau (v/l)^2 = Dk_1^2$. Естественно, $k_1 l$ должно быть много больше единицы, следовательно, $\gamma = \tau (v/l)^2 = Dk_1^2 \gg D l^{-2}$, $\tau \gg D v^{-2}$, видно, что τ мало, но все же не равно нулю. Все неравенства объединяются следующим образом: $D v^{-2} \ll \tau \ll l v^{-1}$, $\gamma^{-1} = \tau^{-1} (l/v)^2 = (Dk_1^2)^{-1} \ll l^2 D^{-1}$. Они непротиворечивы при $R'_m \gg 1$, что, естественно, предполагается. Напомним теперь, что для марковского процесса ряд теории возмущений строится с помощью функции Грина уравнения теплопроводности. Иначе говоря, D не требуется полагать равным нулю. Но функция Грина (в фурье-представлении) будет иметь вид $\exp[-Dk^2(t-t')]$ (k определяется характерными волновыми векторами задачи, а $t-t'$ — корреляционным временем). Тогда даже для максимального $k = k_1$ величина $Dk_1^2(t-t') =$

$= Dk_1^2 \tau \ll 1$ (см. выписанные неравенства), т. е. даже для этих волновых векторов функция Грина в фурье-представлении заменяется единицей. Но эта процедура вычислений эквивалентна тому, что τ просто равно нулю и $\langle v(t) v(t') \rangle \sim \delta(t - t')$. Итак, при вычислениях можно полагать τ равным нулю. Но по физической сути ясно, что $\tau > 0$. Марковская модель оказывается обоснованной (повторим опять, как в гл. II, подразд. 10, что она не нуждается в обосновании!). Вопрос только в приложимости данной модели к реальной турбулентности.

В заключение этого подраздела отметим, что точная постановка задачи для мелкомасштабных полей возможна только в лагранжевом подходе. Именно с этой целью в гл. II мы уделили много места лагранжевому подходу (для крупномасштабных полей этот подход дает лишь возможность строго обосновать результаты, известные уже из эйлерового подхода). Предварительно, однако, нам придется описать в лагранжевой постановке свойства скалярной примеси. Ограничимся для простоты случаем ОИТ. Дело в том, что гиротропность сказывается, как можно ожидать, только на динамике крупномасштабного поля и не проявляется в скоростях двух конкурирующих процессов, описанных выше.

2. Динамика пульсаций скалярной примеси

В этом подразделе полагаем $\langle \theta \rangle = 0$ и рассматриваем динамику корреляционной функции пульсаций $\Theta(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \langle \theta(\mathbf{x}^1) \theta(\mathbf{x}^2) \rangle$. Обратимся прежде всего к модели (2.70). Согласно результатам гл. II, подразд. 6, для Θ имеет место точно такое же уравнение. Для дальнейшего нам потребуется еще большая, чем в гл. II, подразд. 7, конкретизация вида уравнения для p_2 . Для этого рассмотрим дополнительные свойства p_2 . Прежде всего, p_2 как плотность распределения вероятностей не может стать отрицательной. Не противоречит ли этому уравнение (2.70)? Заметим, что, для того чтобы стать отрицательной, p_2 должна пройти через нуль. Если при $t = t_0$ функция p_2 обращается в нуль в точке $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^1(0)$, $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2(0)$, то $\partial p_2 / \partial t$ в этой точке не должна быть отрицательной (иначе в окрестности этой точки p_2 станет меньше нуля). Разложение p_2 в окрестности нуля аппроксимируется положительно определенной формой $\alpha^\beta b_{ij} (\alpha x_i - \alpha x_i^{(0)}) (\beta x_j - \beta x_j^{(0)})$. Требование $\partial p_2 / \partial t \geq 0$ в этой точке запишется в виде

$$(\delta^\nu b_{m\nu} + \nu^\delta b_{j\nu}) T_{mj} (\delta \mathbf{x}^{(0)}, \nu \mathbf{x}^{(0)}) \geq 0. \quad (3.1)$$

Условие (3.1) выполнится, если тензор T удовлетворяет требованиям, накладываемым на корреляционный тензор.

В действительности тензор \hat{T} как раз должен быть корреляционным тензором некоторого (пусть даже неизвестного нам) случайного поля. Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся опять уравнением (2.70), но теперь уже будем смотреть на него как на уравнение для $\Theta(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$. Корреляционная функция долж-

на удовлетворять условию положительной определенности

$$\Phi_1 = \int F(1x) F^*(2x) \Theta(1x, 2x) d^1x d^2x \geq 0, \quad (3.2)$$

$F(x)$ — произвольная функция. Модель (2.70) не должна противоречить (3.2). Корреляционная функция согласно уравнению (2.70) меняется непрерывно во времени, и если (3.2) выполняется в виде неравенства (для произвольного F), т. е. $\Phi_1 > 0$, то в бесконечно близкий промежуток времени неравенство все еще будет выполняться. Нарушение условия (3.2) может наступить, если при $t = t_0$ (3.2) выполняется в виде равенства для некоторого $F = F_1$:

$$\Phi_1 = \int F_1(1x) F_1^*(2x) \Theta(1x, 2x) d^1x d^2x = 0, \quad (3.3)$$

а при $t > t_0$ выражение в левой части станет отрицательным. Для проверки выполнения условия (3.2) умножим (2.70) на $F_1(1x) F_1^*(2x)$, проинтегрируем по $1x, 2x$. Итак, в момент $t = t_0$ полагаем $\Phi_1 = 0$ и должно выполняться $\partial\Phi_1/\partial t \geq 0$. Для вычисления правой части (в левой стоит $\partial\Phi_1/\partial t$) удобнее пользоваться формой записи модели (2.70) в виде (2.64), только, конечно, без многоточий справа и с заменой p_2 на Θ . При интегрировании правой части (2.64), умноженной на $F_1 F_1^*$, по $1x, 2x$ первый член правой части исчезнет. Это следует из того, что одновременно с (3.3) выполняется автоматически

$$\int F_1^2(1x) \Theta(1x, 2x) d^1x = 0, \quad \int F_1^*(2x) \Theta(1x, 2x) d^2x = 0.$$

Неотрицательность второго члена правой части будет иметь место, если

$$\int [\partial_i F_1(1x)] [\partial_j F_1^*(2x)] T_{ij}(1x, 2x) d^1x d^2x \geq 0 \quad (3.4)$$

(напомним, что в этой главе рассматривается ОИТ и $T_{ij} = T_{ji}$ и, кроме того, $T_{ij}(\mathbf{r}) = T_{ij}(-\mathbf{r})$). Условие (3.4) есть, как известно, условие того, что T_{ij} — корреляционный тензор. Кроме того, из (2.61) следует $\partial_i T_{ij} = \partial_j T_{ij} = 0$. Иными словами, T есть корреляционный тензор некоторого соленоидального поля u' (однородного и изотропного):

$$T_{ij} = (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) u(\mathbf{r}) = \langle u_i(1x) u_j(2x) \rangle.$$

Вернемся теперь к главному вопросу. Может ли (2.70) служить моделью реального физического процесса? Положительный ответ на этот вопрос следует из того, что (2.70) является точной записью уравнения для p_2 в случае δ -корреляции по времени эйлерового поля скорости v (марковский процесс для скалярной примеси), только в этом случае тензор T_{ij} определяется эйлеровым полем скорости.

Для того чтобы убедиться в этом, выпишем ряд теории возмущений для θ :

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t v_i(t_1) \partial_i \theta(0) dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} v_i(t_1) \partial_i v_j(t_2) \partial_j \theta(0) dt_1 dt_2 \quad (3.5)$$

— разложение по параметру $\varepsilon = \tau v/l$, величина ε мала для марковского процесса. Ряд оборван на члене второго порядка по ε , дающим неисчезающий вклад наинизшего порядка. Умножим (3.5) в точке ${}^1\mathbf{x}$ на такое же выражение в точке ${}^2\mathbf{x}$ (но в тот же момент времени t !), усредним почленно и возьмем производную по t . Тогда при $t \gg \tau$ получаем уравнение (2.70), где $T_{ij}({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}) = \int_0^\infty \langle v_i({}^1\mathbf{x}, t_1) v_j({}^2\mathbf{x}, t_1 + s) \rangle ds$, т. е. тензор T_{ij} очень простым образом выражается через эйлерово поле скорости. Уравнение для p_2 обязано при этом удовлетворять всем необходимым требованиям, а следовательно, и модель (2.70), где T_{ij} уже задан как корреляционный тензор некоторого лагранжевого поля \mathbf{u}' . Выражение его через эйлеровы характеристики практически невозможно: оно содержит бесконечные (и, возможно, расходящиеся) ряды.

Заметим, что в уравнении не содержится информации о параметре $\tau v/l$. Напомним, что все модельные и реальные уравнения для функций распределения вероятностей нас интересуют только при $t \gg \tau$. Для марковского процесса $\tau \rightarrow 0$, и поэтому (2.70) будет справедливо при всех моментах t , $t > 0$. В реальной турбулентности модель (2.70) должна рассматриваться при $t \gg \tau$. Но в этом случае сведения о параметре $\tau v/l$ отсутствуют в этой модели. Невозможно составить все входящие в этот параметр размерные величины хотя бы из соображений размерности. Так, размерность \hat{T} совпадает с размерностью коэффициента диффузии, из соображений размерности $|\hat{T}| \approx \nu l$. Отсюда можно оценить время изменения p_2 для пространственного масштаба этой функции порядка l . Это время будет l/ν . Чему же равна величина τ в этом процессе? Уравнение (2.70) не содержит такой информации. Вот если бы рассматривалась функция распределения жидких частиц в *разные* моменты t_1, t_2 , вышедших при $t_1 = 0, t_2 = 0$ из тех же точек, что и в p_2 , то эта функция распределения содержала бы информацию о параметре $\varepsilon = \tau v/l$.

Обратимся теперь к уравнению для однородной (в статистическом смысле) скалярной примеси. В этом случае Θ есть функция только от \mathbf{r} , уравнение для Θ (в модели (2.70)) уже выписано в гл. II (см. (2.62)). Это уравнение, как уже говорилось, сохраняет величину $\langle \theta^2 \rangle = \Theta(0)$ и, как легко показать, дает рост $\langle (\nabla\theta)^2 \rangle$. Действительно, $\langle (\nabla\theta)^2 \rangle = -\Delta\Theta|_{\mathbf{r}=0}$ и

$$\partial \langle (\nabla\theta)^2 \rangle / \partial t = T_2 \langle (\nabla\theta)^2 \rangle. \quad (3.6)$$

Здесь мы воспользовались разложением тензора \hat{T} при малых \mathbf{r} :

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = T\delta_{ij} - T_2(r^2\delta_{ij} - \frac{1}{2}r_i r_j). \quad (3.7)$$

Коэффициент $1/2$ появился из требования $\partial_i T_{ij} = 0$, коэффициент T_2 существенно положителен: это необходимо следует из того, что \hat{T} — корреляционный тензор.

Итак, $\langle \theta^2 \rangle$ сохраняется, а $\langle (\nabla\theta)^2 \rangle$ возрастает. Следовательно,

масштаб пульсаций падает. Точнее, характерное волновое число, или «центр тяжести», спектральной функции растет по закону (3.6). В спектральной области, как мы видим, имеется перекачка энергии пульсаций скалярной примеси в область больших волновых чисел. Это соответствует существующим представлениям о скалярной примеси. Все сказанное можно было бы вывести из лагранжевых решений (2.29) и (2.34). Из первого из них с очевидностью следует сохранение $\langle \theta^2 \rangle$, из второго

$$\langle (\nabla \theta)^2 \rangle = \langle \theta_i \theta_i \rangle = \left\langle \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right\rangle \langle \theta_j(\mathbf{a}) \theta_j(\mathbf{a}) \rangle. \quad (3.8)$$

Рост множителя перед начальным значением величины $\langle (\nabla \theta)^2 \rangle$ можно видеть, если перевести тензор $\partial a_j / \partial x_i$ в обратный по формуле (2.23). Рост же квадрата величины $\partial x_i / \partial a_j$ есть «растяжение жидких линий» в турбулентном потоке.

Известно, что спектральная функция скалярной примеси в инерционной области (2.5) имеет спектр колмогоровского типа $E_\theta \sim k^{-5/3}$. Покажем, что этот закон является следствием уравнения (2.62). Для этого нужно рассмотреть изотропно распределенную скалярную примесь, т. е. Θ зависит от r . Выпишем предварительно полезные вспомогательные формулы:

$$\begin{aligned} \partial_j \Theta(r) &= \frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{r_j}{r}, \quad \Delta \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \\ \partial_i \partial_j \Theta(r) &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{\delta_{ij} - r_i r_j r^{-2}}{r}. \end{aligned}$$

Кроме того, нам потребуется выражение для \hat{T} в инерционном интервале. Выражение для следа этого тензора T_{ii} , т. е. корреляционной функции, можно получить из соображений размерности (так же как в гл. II, подразд. 2, колмогоровский спектр). Размерность этого тензора совпадает с размерностью коэффициента диффузии. Поэтому $T_{ii} \sim v_k k^{-1}$, $v_k \sim k^{-1/3}$, $T_{ii} \sim k^{-4/3}$. Следовательно, для спектральной функции $u(k)$, $T_{ii}(r) = \int u(k) e^{-ikr} dk$, имеем

$$u(k) k^2 \sim k^{-7/3}. \quad (3.9)$$

Закону (3.9) соответствует в r -представлении следующий вид $T_{ii}(r)$:

$$T_{ii} = T_{ii}(0) - T'_{1/3} r^{1/3}, \quad (3.10)$$

$l_1 \ll r \ll l$. Область r , в которой справедливо (3.10), определена согласно (2.5). Теперь легко составить вид тензора \hat{T} в этой же области, используя свойство соленоидальности тензора $\partial_i T_{ij} = 0$. Выпишем его:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{r}) &= T \delta_{ij} - T'_{1/3} r^{-2/3} (r^2 \delta_{ij} - 2/5 r_i r_j), \\ 13/5 T'_{1/3} &= T'_{1/3} > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полезно также иметь в виду, что для колмогоровской турбулентности корреляционная функция B_{ii} (см. определение в (2.4)) бу-

дет иметь следующий вид в инерционной области:

$$B_{ii} = B_{ii}(0) - B'r^{2/3} \quad (3.12)$$

(ср. с (3.10)).

Итак, для скалярной примеси тоже должен получиться закон (3.12). Выпишем уравнение для $\Theta(r)$, воспользовавшись (2.62) и (3.11):

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = 2T_{4/3}r^{-2/3} \left(\frac{3}{5} \frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} r^2 + 2r \frac{\partial\Theta}{\partial r} \right). \quad (3.13)$$

Стационарный спектр получится, если добавить справа (3.13) крупномасштабный источник $\varepsilon_\theta = \langle \theta^2 \rangle v/l$ и положить $\partial/\partial t = 0$. Решение для Θ ищем в виде

$$\Theta = A + ar^\beta + \dots \quad (3.14)$$

Теперь удобно воспользоваться оценкой

$$T_{4/3} = vl^{-4/3} = vl^{-1/3}. \quad (3.15)$$

Ясно, что в области, где $r \ll l$ (а именно для таких r и ведется рассмотрение), выписанный член правой части (3.13) много больше источника ε_θ . Поэтому в первом приближении ε_θ и Θ — константы. В следующем приближении по формуле (3.14) подставим ar^β в скобку (3.13) и приравняем все выражение постоянной величине $-\varepsilon_\theta$. Тогда получим

$$\beta = 2/3, \quad a = -\varepsilon_\theta [2T_{4/3} (3/5\beta^2 + 7/5\beta)]^{-1}. \quad (3.16)$$

Первое из равенств (3.16) дает показатель степени, совпадающий с (3.12) для колмогоровской корреляционной функции. Второе дает нужный знак коэффициента при $r^{2/3}$, как в (3.12). Далее, поскольку $A = \langle \theta^2 \rangle$ и $T_{4/3}$ оценивается по (3.15), легко получить вместо (3.14) $\Theta = \langle \theta^2 \rangle (1 - r^{2/3}l^{-2/3})$. Это выражение показывает, что (3.14) действительно имеет вид разложения, т. е. $|ar^\beta| \ll A$ при $r \ll l$. Тем самым процедура последовательных приближений, приведшая к (3.16), является самосогласованной.

Итак, уравнение для Θ — (2.64), а для однородной примеси — уравнение (2.62) правильно описывают динамику скалярной примеси. В частности, они дают колмогоровский спектр. Заметим дополнительно, что (3.13) дает правильное время жизни пульсаций масштаба r (т. е. имеющих характерный размер изменения, равный r). Простая оценка (3.13) дает

$$\tau(r) = r^{2/3} T_{4/3}^{-1} = l^{1/3} r^{2/3} v^{-1}. \quad (3.17)$$

Соответствующее время $\tau(k)$ получается и для колмогоровской турбулентности (см. гл. II, подразд. 2):

$$\tau(k) = (v_k k)^{-1} = l^{1/3} v^{-1} k^{-2/3}, \quad v_k = v (lk)^{-1/3}.$$

Это выражение для $\tau(k)$ получится из (3.17) при замене r на k^{-1} .

Все изложенное в этом подразделе служит обоснованием того, что модель (2.70), использованная в гл. II, подразд. 8, действи-

тельно может служить физически реализуемой моделью для выяснения динамики крупномасштабных магнитных полей. В заключение приведем спектральную запись уравнения (2.62) для изотропной примеси:

$$\partial \Theta(k) / \partial t = -2D_{\tau} k^2 \Theta(k) + 2 \int u(p) \Theta(q) [q^2 - (qp)^2 p^{-2}] dq. \quad (3.18)$$

где $p = k - q$, $\Theta(k)$ — спектральная функция скалярной примеси.

3. Функция распределения для двух близких точек жидкости

Лагранжева функция распределения p_2 описывает поведение двух жидких частиц. При $t \gg \tau$ каждая из частиц уходит далеко от своего начального положения. Точнее, $|x - x_0| \gg l$. Но это не значит, что две частицы непременно должны за это же время далеко уйти друг от друга! Само существование тензора

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{x_i(a + \delta a) - x_i(a)}{\delta a_j}$$

говорит о том, что если частицы вышли из бесконечно близких точек a и $a + \delta a$, то и при $t \gg \tau$ они близко расположены. В этом разделе считаем, что расстояние r между жидкими частицами остается в интересующий нас момент времени t меньше, чем все характерные масштабы турбулентности. Для турбулентности с малым числом степеней свободы (как у странных аттракторов, см. гл. II, подразд. 3) полагаем, что возбуждены лишь пульсации скорости масштаба l . Тогда расстояние между жидкими частицами должно оставаться меньше l . Для колмогоровской турбулентности это расстояние должно быть меньше $l_1 = 2\pi/k_1$ (см. определение (2.9)).

Уравнением для p_2 для бесконечно близких частиц мы уже пользовались и записывали его в виде (2.66). Здесь, однако, нам потребуется следующее приближение по параметру r/l (или r/l_1 для колмогоровской турбулентности), поскольку нас в этой главе интересует мелкомасштабная структура турбулентности. Кроме того, в (2.66) полагаем $C = 0$, поскольку рассматривается ОИТ. Тогда уточненный вид (2.66) можно записать так:

$$\begin{aligned} \partial p_2 / \partial t = & T({}^{11}\Delta + 2{}^1\partial_i^2 \partial_i + {}^{22}\Delta) p_2 - 2T_2 (r^2 \delta_{ij} - \\ & - 1/2 r_i r_j) {}^1\partial_i^2 \partial_j p_2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$r = {}^2x - {}^1x$. Новый член здесь (второй) выписан в таком виде, чтобы операторы ${}^1\partial_i^2 \partial_j$ могли быть вынесены перед скобкой (свойство эрмитовости, см. гл. II, подразд. 7). Естественно, (3.19) можно получить с помощью общего выражения (2.64) и разложения (3.7).

Выясним теперь, что следует понимать под многоточиями в (3.19). Ясно, что под ними понимаются следующие члены разложе-

ния уравнения для p_2 по дифференциальным операторам. Члены какого типа там могут быть? Можно показать, что члены, содержащие нечетное число операторов ∂ , не входят в разложение (3.19). Действительно, самосопряженности оператора (см. гл. II, подразд. 7) в правой части (3.19) можно добиться членами вида

$$\partial\partial\hat{T}(\mathbf{r})\partial\partial p_2. \quad (3.20)$$

Для упрощения записи индексы у операторов ∂ и тензора \hat{T} не выписаны. В то же время выражение в правой части (3.19) должно иметь дивергентную форму (см. (2.55)), поэтому операторы в (3.20) должны передвигаться влево, т. е. член (3.20) должен записываться в виде $\partial\partial\partial\partial\hat{T}p_2$. Но отсюда следует, что $\partial\hat{T} = \partial_i T_{ijfm}(\mathbf{r}) = 0$, и, следовательно, этот же член можно записать в виде $\hat{T}\partial\partial\partial\partial p_2$. Здесь оператор ∂ действует четыре раза на p_2 , т. е. это член четвертого порядка по ∂ . Аналогичное утверждение относится и к членам более высокого порядка. Члены пятого, седьмого и т. д. порядков не содержатся в разложении (3.19).

Обратимся теперь к рассмотрению членов четного порядка по дифференциальному оператору. Начнем с членов четвертого порядка. Рассмотрение четных членов более высокого порядка по оператору ∂ вполне аналогично. Их можно разбить на две категории.

1. Члены с неодинаковым числом операторов ${}^1\partial$ и ${}^2\partial$:

$$({}^1\partial_i {}^1\partial_j {}^1\partial_f {}^2\partial_m + {}^2\partial_i {}^2\partial_j {}^2\partial_f {}^1\partial_m) T'_{ijfm} p_2, \quad (3.21)$$

$$({}^1\partial_i {}^1\partial_j {}^1\partial_f {}^1\partial_m + {}^2\partial_i {}^2\partial_j {}^2\partial_f {}^2\partial_m) T'''_{ijfm} p_2. \quad (3.22)$$

2. Члены с одинаковым числом этих операторов:

$$({}^1\partial_i {}^1\partial_j {}^2\partial_f {}^2\partial_m + {}^2\partial_i {}^2\partial_j {}^1\partial_f {}^1\partial_m) T''_{ijfm} p_2. \quad (3.23)$$

Выражения (3.21) — (3.23) выписаны с учетом очевидной симметрии функции распределения p_2 по точкам ${}^1\mathbf{x}$ и ${}^2\mathbf{x}$. Это же требование симметрии приводит к тому, что тензоры \hat{T}' , \hat{T}'' , \hat{T}''' должны быть симметричными по всем индексам.

Покажем, прежде всего, что члены вида (3.21) отсутствуют в разложении (3.19). Воспользуемся для этого тем, что (3.19) есть одновременно уравнение для $\Theta({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x})$. Составим форму (3.2) с условием (3.3). Положим сначала

$$F_1(\mathbf{x}) = C\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.24)$$

Тогда (3.3) будет выполняться, если $\Theta(\mathbf{x}_0, {}^2\mathbf{x}) = \Theta({}^1\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$. Положим далее, что

$$\Theta({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}) = \Theta'({}^1\mathbf{x})\Theta'({}^2\mathbf{x}), \quad (3.25)$$

где Θ' — произвольная функция. В таком виде Θ удовлетворяет свойствам корреляционной функции (неоднородного процесса). Для выполнения (3.3) необходимо, чтобы $\Theta'(\mathbf{x}_0) = 0$. Потребуем далее (чтобы избежать вклада от выражений (3.22), (3.23)) обраче-

ния в нуль вторых и четвертых производных от Θ' в точке \mathbf{x}_0 . Умножим теперь (3.19) на $F_1(\mathbf{x})F_1^*(\mathbf{x})$ и проинтегрируем по \mathbf{x} . Тогда (3.24) даст вклад

$$2CC^*T'_{ijfm}(0) [\partial_i \partial_j \partial_f \Theta'(\mathbf{x}_0)] \partial_m \Theta'(\mathbf{x}_0), \quad (3.26)$$

который не является знакоопределенным. Можно всегда подобрать выражение в квадратной скобке таким образом при определенной величине $\partial_m \Theta'(\mathbf{x}_0)$, чтобы сделать этот вклад отрицательным. Обратим внимание на то, что величину (3.26) можно сделать больше по абсолютной величине, чем вклад соответствующего первого (выписанного) члена правой части (3.19). Дело в том, что размерность $\hat{T}'(0)$ отличается от размерности T в (3.19), и вклад (3.26) будет большим при достаточно больших значениях производных от Θ' .

Составим опять форму (3.2) при

$$F_1(\mathbf{x}) = C\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + C_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1). \quad (3.27)$$

Теперь в выражении для $\partial\Phi_1/dt$ вклад от (3.21) вместо формы (3.26) будет иметь вид

$$(CC_1^* + C^*C_1)T'_{ijfm}(\mathbf{r}) [(\partial_i \partial_j \partial_f \Theta'(\mathbf{x}_0)) \partial_m \Theta'(\mathbf{x}_1) + (\partial_i \partial_j \partial_f \Theta'(\mathbf{x}_1)) \partial_m \Theta'(\mathbf{x}_0)], \quad (3.28)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$. Это выражение тоже не является знакоопределенным: при любом значении произведения \hat{T} на квадратную скобку отрицательности (3.28) можно достигнуть, подбирая соответствующим образом знаки у C и C_1 . Итак, член (3.21) приводит к нефизическому результату: отрицательность формы (3.2) — и не может содержаться в разложении (3.19).

Перейдем к рассмотрению выражений (3.22), (3.23). Начнем с (3.22). Прежде всего, тензор \hat{T}''' не должен зависеть от \mathbf{r} . Действительно, функция p_2 , проинтегрированная по \mathbf{x} , уже не должна зависеть от \mathbf{x} (см. гл. II, подразд. 8). В то же время первый член в круглой скобке (3.22) дал бы такую зависимость через \hat{T}'' . Покажем теперь, что $\hat{T}''' = 0$. Для этого воспользуемся еще одним свойством (3.19). Пусть плотность скалярной примеси $\theta(\mathbf{x}, t_0)$ в момент t_0 достигает максимума в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Тогда во все последующее время $t > t_0$

$$\theta(\mathbf{x}, t) < \theta(\mathbf{x}_0, t_0). \quad (3.29)$$

Иначе говоря, максимум $\theta(\mathbf{x}_0, t_0)$ останется и не будет превзойден. Для того чтобы убедиться в свойстве (3.29), вспомним, что согласно (2.29) скорость только переносит скалярную примесь и максимальное значение θ в несжимаемой среде не меняется. С учетом молекулярной диффузии (см. (2.2)) максимальное значение будет только убывать: первые производные от θ по \mathbf{x} в точке \mathbf{x}_0 обращаются в нуль, а $\Delta\theta(\mathbf{x}_0) < 0$.

Наличие члена (3.22) противоречит свойству (3.29). Рассмотрим Θ в виде (3.25). Пусть реализация $\theta(\mathbf{x}, t_0)$ достигает максимума в точке \mathbf{x}_0 . Тогда функция $\Theta({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, t_0)$ экстремальна в точке ${}^1\mathbf{x} = {}^2\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ и достигает в этой точке максимума (${}^1\partial_i\Theta = {}^2\partial_i\Theta = 0$, в то время как ${}^1\partial_i{}^1\partial_j\Theta = {}^2\partial_i{}^2\partial_j\Theta$ образуют в этой точке отрицательно определенную форму). Следовательно, первый член правой части (3.19) дает в этой точке отрицательный вклад, и $\partial\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)/\partial t$ при $t = t_0$ может стать только отрицательной, не нарушая свойства абсолютного максимума в точке ${}^1\mathbf{x} = {}^2\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ и тем самым свойство максимума (3.29). В то же время тензор $\partial_i\partial_j\partial_k\partial_m\Theta$ не является знакоопределенным и может быть сделан произвольным не только по знаку, но и по абсолютной величине, т. е. член четвертого порядка типа (3.22) может конкурировать с первым членом правой части (3.19) в точке ${}^1\mathbf{x} = {}^2\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ и давать положительный вклад. Тогда максимум в этой точке будет превзойден, и свойство (3.29) нарушится. Итак, $\hat{T}''' = 0$.

Единственное выражение, которое осталось проанализировать, — это (3.23) ((3.21) и (3.22), как мы выяснили, обращаются в нуль). Нас интересуют близкие точки, т. е. когда величина $|{}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a}|$ мала. Ясно, что траектории ${}^1\mathbf{x}({}^1\mathbf{a}, t)$ и ${}^2\mathbf{x}({}^2\mathbf{a}, t)$ близки друг к другу:

$$r_i = {}^2x_i({}^2\mathbf{a}, t) - {}^1x_i({}^1\mathbf{a}, t) = a_{ij}({}^2a_j - {}^1a_j) = a_{ij}r_j^{(0)}.$$

Скорость изменения r_i есть

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{da_{ij}}{dt} r_j^{(0)}, \quad (3.30)$$

поскольку коэффициенты a_{ij} зависят только от времени. Далее, новые коэффициенты da_{ij}/dt тоже, конечно, зависят от времени и имеют сами размерность частоты. Они определяют изменение p_2 , т. е. $\partial p_2/\partial t$. Поэтому соответствующие коэффициенты в (3.19) тоже должны иметь размерность частоты. Для того чтобы выделить их, будем рассматривать (3.19) как уравнение для Θ — корреляционной функции для однородной примеси. Ясно, что $\Theta(r, t)$ определяется для близких частиц локальной деформацией da_{ij}/dt , т. е. уравнение для Θ должно содержать лишь коэффициент с размерностью частоты. Тогда ${}^1\partial_i = -{}^2\partial_i$, первый член правой части (3.19) исчезает. У второго коэффициент T_2 имеет нужную размерность частоты. Остается также член (3.23). Дает ли он вклад в разложение (3.19)? Для того чтобы выяснить это, раскладываем \hat{T} по \mathbf{r} . Члены нулевого и второго порядков по \mathbf{r} содержат коэффициенты неправильной размерности, т. е. не имеющие размерность частоты.

Тензор \hat{T}'' четвертого порядка по \mathbf{r} , симметричный по индексам и обладающий свойством $\partial_i T''_{ijfm} = 0$, можно сконструировать (интересно отметить, что невозможно построить соответствующий

тензор второго порядка по \mathbf{r}). Выпишем его общий вид.

$$T''_{ijfm} = T_4 [2r^4 (\delta_{ij}\delta_{fm} + \delta_{if}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jf}) - r^2 (\delta_{ij}r_f r_m + \delta_{if}r_j r_m + \delta_{im}r_j r_f + \delta_{jf}r_i r_m + \delta_{jm}r_i r_f + \delta_{fm}r_i r_j) + r_i r_j r_f r_m]$$

Покажем, что в действительности $T_4 = 0$, т. е. и (3.23) отсутствует в (3.19). Действительно, в противном случае уравнение для изотропной примеси $\Theta = \Theta(r)$ неизбежно содержало бы член $T_4 r^4 \partial^4 \Theta(r) / \partial r^4$. Уравнение же для спектральной функции содержало бы члены $T_4 k^3 \partial^3 \Theta(k) / \partial k^3$, $T_4 k^4 \partial^4 \Theta(k) / \partial k^4$. Но члены такого вида недопустимы в уравнении для $\Theta(k)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Theta = T_2 \left(a_0 \Theta + a_1 k \frac{\partial}{\partial k} \Theta + a_2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial k^2} \Theta \right) + \dots \quad (3.31)$$

Здесь a_0 , a_1 , a_2 — безразмерные (неизвестные) константы. Если вместо многоточия в (3.31) подставить члены с третьей, четвертой и т. д. производными, то $\Theta(k)$ сможет стать отрицательной, что недопустимо для спектральной функции. В том, что $\Theta(k)$ может стать отрицательной, можно убедиться следующим образом. Пусть при $t = t_0$ величина функции $\Theta(k)$ обращается в нуль в точке $k = k_0$. Тогда разложение $\Theta(k)$ в окрестности этой точки имеет вид

$$\Theta(k) = \alpha_2 (k - k_0)^2 + \alpha_3 (k - k_0)^3 + \alpha_4 (k - k_0)^4 + \alpha_6 (k - k_0)^6. \quad (3.32)$$

Единственный здесь знакоопределенный коэффициент — это α_2 , $\alpha_2 > 0$ (для того, чтобы в окрестности точки $k = k_0$ было $\Theta(k) > 0$). Остальные коэффициенты (α_3 , α_4 , α_6) могут быть какими угодно. Более того, они могут быть произвольными по величине: положительности $\Theta(k)$ можно всегда добиться сужением окрестности точки $k = k_0$. Подставим (3.32) в правую часть (3.31). Ясно, что при $k = k_0$ должно выполняться $\partial \Theta(k_0) / \partial t \geq 0$ (иначе $\Theta(k_0)$ станет отрицательной). Для этого, конечно, коэффициент a_2 должен быть положительным (что следует из (3.32) при $\alpha_3 \rightarrow 0$, $\alpha_4 \rightarrow 0$, $\alpha_6 \rightarrow 0$). Если теперь в (3.31) присутствуют члены с третьей, четвертой и т. д. производными, то коэффициенты α_3 , α_4 , α_6 из (3.32) дадут свой вклад — с произвольным знаком и произвольной величины, и $\Theta(k_0)$ может стать отрицательной.

Итак, члены четвертого порядка по степени \mathbf{r} тензора \hat{T}'' в (3.23) отсутствуют в разложении (3.19), а они могли бы дать вклад, сравнимый с выписанным. Члены более высокого порядка по \mathbf{r} (если они не обращаются в нуль) дадут уже малый вклад по параметру r/l_1 . Например, коэффициент при члене шестого порядка по \mathbf{r} имеет порядок величины $T_2 l_1^{-2}$ (получено из соображений размерности) и мал по сравнению с выписанными в (3.19) при $r \ll l_1$ (что и предполагается).

Анализ членов шестого порядка по ∂ аналогичен приведенному. Члены первой категории типа (3.21) будут содержать один оператор, действующий на одну точку, и пять — на другую, два — на

одну точку и четыре — на другую (отсутствие их доказывается точно так же, как отсутствие (3.21)). Члены первой категории типа (3.22) будут содержать шесть операторов, действующих на одну и ту же точку, и отсутствуют по той же причине, что и (3.22). Наконец, члены второй категории типа (3.23) содержат три оператора, действующих на одну точку, и три — на другую, и тоже не дают вклада в разложение (3.19). Точно так же проводится анализ членов более высокого порядка.

В заключение данного подраздела отметим: уравнение (3.19) без дополнительных членов адекватно описывает функцию распределения двух близких частиц. Отметим, что на уравнение (3.19) можно смотреть несколько иначе. Пусть нас интересует поведение p_2 в окрестности двух близких точек: $r \ll l, l_1$, но расстояние между ${}^1\mathbf{a}$ и ${}^2\mathbf{a}$ не мало. Операторы и функции в (3.19) не зависят от ${}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}$ (см. гл. II, подразд. 7), следовательно, разложение (3.19) будет сохранять свой вид. Но какой оно будет иметь смысл? В этом случае p_2 меняется медленно: вероятность попадания в две близкие точки для частиц, вышедших из далеких, мала, и функция p_2 «размазана» по большой площади. Это означает, что высшие производные в (3.19), если бы они там даже и присутствовали, дали бы малый вклад в (3.19). Иначе говоря, для $r \ll l, l_1$, но $|{}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a}|$ велико, анализ членов более высокого порядка в (3.19) не потребовался бы.

4. Свойства функции распределения для неблизких жидких частиц

Вернемся к модели турбулентности, описываемой уравнением 2.70) В подразд. 2 показано, что она является физически реализуемой немарковской моделью. В дальнейшем нам потребуется функция распределения для четырех жидких частиц: $p_4 = p_4({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}, {}^3\mathbf{x}, {}^4\mathbf{x} | {}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}, {}^3\mathbf{a}, {}^4\mathbf{a}, t) = p_4(\alpha\mathbf{x} | \beta\mathbf{a}, t)$, $p_2 = \int p_4 d^3x d^4x$ — плотность вероятности того, что жидкие частицы находятся в точках $\alpha\mathbf{x}$ в момент времени t , если при $t = 0$ они находились в точках $\beta\mathbf{a}$. Очевидным обобщением модели (2.70) является

$$\partial p_4 / \partial t = \sum_{\alpha, \beta} T_{ij}(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{x}) \alpha \partial_i \beta \partial_j p_4. \quad (3.33)$$

Здесь греческие индексы пробегает значения 1, 2, 3, 4. Обоснование физической реализуемости процесса (3.33) проводится точно так же, как в подразд. 2 для двух жидких частиц. Прежде всего, уравнение (3.33) понимается как уравнение, справедливое только при $t \gg \tau$. Кроме того, точно такое же уравнение можно записать для пульсаций скалярной примеси. Более конкретно для четвертого момента $\Theta_4 = \langle \theta({}^1\mathbf{x})\theta({}^2\mathbf{x})\theta({}^3\mathbf{x})\theta({}^4\mathbf{x}) \rangle$. Четырехточечная функция Θ_4 зависит еще от времени и может быть задана в качестве начальных данных для (3.33) при $t = t_0$, $t_0 \gg \tau$. Уравнение (3.33) для Θ_4 получается для марковской модели с использованием раз-

ложения (3.5), при этом T_{ij} непосредственно выражается через эйлеровы характеристики. Это и есть обоснование физической реализуемости процесса (3.33).

Вернемся к функции распределения p_2 , которая, если расстояние r не мало, уже не удовлетворяет уравнению (3.19). Теперь следует писать общее выражение (2.64). В предыдущем подразделе показано, что члены первой категории (3.21), (3.22) не присутствуют в разложении. Что касается членов второй категории (3.23), то мы показали, что разложение \hat{T}'' по степеням r начинается со степеней выше четвертого порядка. Но тогда можно показать, что $\hat{T}'' = 0$. Действительно, образуем форму (3.2) с условием (3.3). Зададим F_1 в виде (3.26), тогда член (3.23) даст следующий вклад в выражение для Φ_1 : $(CC_1^* + C^*C_1) [T_{ijm}''(r)\partial_i\partial_j\theta'(x_0)\partial_j\partial_m \times \times \theta'(x_1)]$, которое не является знакоопределенным из-за наличия множителя $CC_1^* + C^*C_1$ (ср. с (3.28)). Отметим еще раз, что отсутствие членов такого типа доказывается благодаря тому, что $\hat{T}''(r) = 0$ при $r = 0$. Если бы это было не так, то в выражении для Φ_1 вместо $CC_1^* + C^*C_1$ стояли бы два дополнительных слагаемых: $CC^* + C_1C_1^*$. Вместе с имеющимися они образовали бы положительную форму $CC^* + CC_1^* + C^*C_1 + C_1C_1^*$, и вклад от (3.23) был бы неотрицательно определенной формой при наложении на \hat{T}'' дополнительного (выполнимого) условия о его неотрицательной определенности.

Итак, (2.64) является точным представлением реального процесса с однородной корреляционной функцией $\Theta(r)$. Полностью уравнение для $\Theta(r)$ выписано в (2.62). Для колмогоровской турбулентности в инерционной подобласти тензор T_{ij} записывается в виде (3.11). Читателя может привести в недоумение следующий факт. Представляется, что утверждение о том, что (2.62) точным образом описывает случайный процесс, вступает в противоречие с выводами подразд. 3. Действительно, пользуясь разложением спектральной функции в точке $k = k_0$ в виде (3.32), мы отбросили возможность того, что в уравнении для $\Theta(k)$ (3.31) содержатся производные выше второго порядка. Между тем, раскладывая T_{ij} в (2.62) по степеням r , мы дойдем и до четвертого порядка по r и вместо (3.19) будем иметь дополнительное выражение четвертого порядка по r . Но это означает наличие в фурье-представлении четвертой производной в уравнении (3.31). Нет ли здесь противоречия? Оказывается, нет. Сама возможность разложения по r_i соответствует в фурье-представлении возможности разложения $\Theta(k)$ по $\partial/\partial k$. Пусть коэффициенты α_i в (3.32) представляют собой коэффициенты ряда Тэйлора в точке $k = k_0$ для «нормальной» $\Theta(k)$. Нормальной спектральной функцией мы назовем такую, у которой производные оцениваются естественным образом:

$|\partial\Theta(k)/\partial k| \approx \max \Theta(k)/k'$, $|\partial^2\Theta/\partial k^2| \approx \max \Theta(k)/(k')^2$ и т. д. (k' — характерный волновой вектор спектральной функции $\Theta(k)$). Тогда коэффициенты α_i в (3.32) оцениваются как $\alpha_3 \approx \alpha_2/k'$,

$\alpha_4 \approx \alpha_2/(k')^2$, $\alpha_6 \approx \alpha_2/(k')^4$ и т. д. Ясно из соображений размерности, что T_4 в разложении

$$T_{ii} = 3T - {}^5/2 T_2 r^2 + T_4 r^4 \quad (3.34)$$

оценивается как $T_4 \approx T_2 l_1^{-2}$. Пользуясь этими оценками, мы видим, что член четвертого порядка по r , например в (3.31), оценивается при $k \approx k'$ как

$$T_4 k^2 \frac{\partial^4 \Theta(k)}{\partial k^4} \approx T_4 \max \Theta(k) \approx T_2 l_1^{-2} (k')^{-2} \max \Theta(k).$$

В то же время член второго порядка в (3.31) оценивается как $T_2 k^2 \partial^2 \Theta / \partial k^2 \approx T_2 \max \Theta(k)$. Сама возможность разложения тензора T_{ij} по \mathbf{r} означает, что $r \ll l_1$ или $k' l_1 \gg 1$. В этом случае член четвертого порядка дает пренебрежимо малый вклад в (3.31) по сравнению с членом второго порядка и не может повлиять на знак $\partial \Theta / \partial t$ в точке $k = k_0$.

Пусть теперь $\Theta(k)$ в окрестности $k = k_0$ не ведет себя «нормальным» образом. Например, Θ описывается (3.32), кроме того, пусть (и в этом состоит «ненормальность») $|\alpha_4| \approx \alpha_2 l_1^2 \approx \alpha_2 (k_1)^{-2}$. Тогда, конечно, член четвертого порядка в (3.31) сравним с членами второго порядка. Но в этом случае для вычисления $\partial \Theta / \partial t$ в точке k_0 следует учитывать члены более высокого порядка по \mathbf{r} . Действительно, следующий член $T_6 r^6$ разложения (3.34) дает немалый вклад с учетом $\alpha_6 \neq 0$ и того, что $T_6 \approx T_2 l_1^{-4}$. Но вклад членов более высокого порядка должен быть таков, чтобы $\Theta(k_0)$ не стала отрицательной! Ведь модель (2.70) и следующее отсюда уравнение (2.62) являются физически реализуемыми. Возвращаясь к рассуждениям подразд. 3, отметим, что там для нас существенно было наличие *конечного числа* производных по координатам в уравнении для p_2 . Если, например это разложение может быть представлено членами не выше четвертого порядка, то вклад четвертой производной по k в (3.31), будучи произвольным, уже ничем не может быть скомпенсирован.

5. Уравнение динамики супермелкомасштабных полей

В этом подразделе рассмотрим поведение пульсаций магнитных полей весьма малых масштабов. Более конкретно, корреляционный тензор магнитного поля $H_{ij} = \langle H_i({}^1\mathbf{x}) \tilde{H}_j({}^2\mathbf{x}) \rangle$ считаем зависящим лишь от расстояния между точками ($H_{ij} = H_{ij}({}^1\mathbf{x} - {}^2\mathbf{x})$), причем характерный масштаб изменения H_{ij} много меньше всех характерных размеров в турбулентности, т. е. l и l_1 . Будем рассматривать лишь пульсационные поля, т. е. $\langle \mathbf{H} \rangle = 0$.

Уравнение для корреляционной функции магнитного поля в модели (3.33). Прежде всего нас интересуют близкие точки, поэтому можно пользоваться разложением тензора \tilde{T} в виде (3.7). Воспользуемся точным решением (2.30), составим квадратичную

комбинацию:

$$H_i({}^1\mathbf{x}) H_j({}^2\mathbf{x}) = \lim_{\substack{{}^3\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a} \\ {}^4\mathbf{a} \rightarrow {}^2\mathbf{a}}} \frac{{}^3x_i - {}^1x_i}{{}^3a_f - {}^1a_f} \frac{{}^4x_j - {}^2x_j}{{}^4a_m - {}^2a_m} H_f({}^1\mathbf{a}) H_m({}^2\mathbf{a}). \quad (3.35)$$

Из этого выражения видно, что близкими являются не только точки ${}^1\mathbf{x}$ и ${}^2\mathbf{x}$, но и что величины ${}^3\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}$, ${}^4\mathbf{x} - {}^2\mathbf{x}$ — бесконечно малы. Следовательно, нам требуется рассматривать (3.33) при условии, что расстояния между всеми четырьмя точками малы.

Усредним выражение (3.35):

$$H_{ij} = \langle H_i H_j \rangle = \int \lim_{\substack{{}^3\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a} \\ {}^4\mathbf{a} \rightarrow {}^2\mathbf{a}}} [({}^3x_i - {}^1x_i)/({}^3a_f - {}^1a_f)] \times \\ \times [({}^4x_j - {}^2x_j)/({}^4a_m - {}^2a_m)] p^4 H_{fm}({}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a}) d^1\mathbf{a} d^2\mathbf{a} d^3\mathbf{x} d^4\mathbf{x}. \quad (3.36)$$

Здесь проведено усреднение по начальным точкам ${}^1\mathbf{a}$, ${}^2\mathbf{a}$, по близким траекториям (интегрирование по ${}^3\mathbf{x}$, ${}^4\mathbf{x}$) и по начальному распределению магнитного поля. Выражение (3.36) можно записать в более компактном виде:

$$H_{ij}({}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}) = \int G_{fm}^{ij}({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x} | {}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}, t) H_{fm}({}^2\mathbf{a} - {}^1\mathbf{a}) d^1\mathbf{a} d^2\mathbf{a}. \quad (3.37)$$

В записи (3.37) гораздо меньше переменных по сравнению с (3.36). Казалось бы, проще задавать турбулентность в виде задания тензора \hat{G} в (3.37) или уравнения для этого тензора. Проще по сравнению с заданием p_4 , зависящей от восьми координат (четыре точки ${}^2\mathbf{x}$ и четыре точки ${}^1\mathbf{a}$). Однако определить вид тензора \hat{G} для физически реализуемого (по меньшей мере) процесса весьма трудно. Здесь уместно напомнить, что соответствующее выражение для крупномасштабного поля, где тензор отклика \hat{G} имеет всего два индекса (см. гл. II, подразд. 8), тоже мало полезно. Там даже не удастся уточнить первый член разложения по kl тензора $\hat{G} = -k^2 D_{\tau} \delta_{ij}$ (для ОИТ). В общем случае знак коэффициента D_{τ} не может быть определен. Что уж говорить о задании тензора отклика \hat{G} в (3.37), где требуется знать не разложение по kl , а функциональный вид тензора! Запись (3.37) дает только возможность убедиться в том, что однородное в статистическом смысле начальное поле приводит лишь к однородному полю. Действительно, однородность самой турбулентности приводит к инвариантности \hat{G} относительно сдвига: $\hat{G} = \hat{G}({}^1\mathbf{x} - \mathbf{a}, {}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{a} | {}^1\mathbf{a} - \mathbf{a}, {}^2\mathbf{a} - \mathbf{a})$. Отсюда следует инвариантность правой части (3.37) как функции от ${}^1\mathbf{x}$, ${}^2\mathbf{x}$ относительно сдвига. Именно поэтому левая часть (3.37) зависит лишь от ${}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}$, что соответствует однородному случайному полю в момент времени t .

Перейдем к выводу уравнения для H_{ij} . Возьмем производную от (3.36) по времени. В правой части от t зависит только p_4 , заменим $\partial p_4 / \partial t$ согласно модели (3.33). Дальнейший переход к уравнению для H_{ij} вполне аналогичен вычислениям в гл. II, под-

разд. 7. Необходимо, во-первых, перенести действие двух операторов ${}^{\alpha}\partial_i$, ${}^{\beta}\partial_j$, на все выражение под интегралом в (3.36) по схеме

$$\begin{aligned}({}^3x_i - {}^1x_i){}^1\partial_m p_4 &= {}^1\partial_m ({}^3x_i - {}^1x_i) p_4 - p_4 {}^1\partial_m ({}^3x_i - {}^1x_i), \\({}^3x_i - {}^1x_i){}^3\partial_m p_4 &= -p_4 {}^3\partial_m ({}^3x_i - {}^1x_i).\end{aligned}$$

Во втором выражении отсутствует член с производной ${}^3\partial_m$, действующей на все выражение справа. Это связано с тем, что такие члены исчезнут при интегрировании по 3x . Аналогично обстоит дело с членами, содержащими ${}^4\partial_m$. Во-вторых, необходимо выразить правую часть через $H_{ij}(t)$, пользуясь (непродифференцированным по t) выражением (3.36). Тензор \hat{T} примем в форме (3.7). В результате получим

$${}^{1/2}\partial H_{ii}/\partial t = T_2 (r^2 \Delta H_{ii} - {}^{1/2}r_m r_n \partial_m \partial_n H_{ii} + r_m \partial_m H_{ii} + 5H_{ii}), \quad (3.38)$$

$\mathbf{r} = {}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}$. Выпишем (3.38) в фурье-представлении для спектральной функции $H(k, t)$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = T_2 \left(k^2 \frac{\partial^2 H}{\partial k^2} + 2k \frac{\partial H}{\partial k} + 4H \right). \quad (3.39)$$

Поскольку $H(k)$ — спектральная функция, то $H \geq 0$ при всех k . Пользуясь этим свойством, удобно анализировать интегральные характеристики $H(k)$, которые просто следуют из (3.39):

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} H dk = 4T_2 \int_0^{\infty} H dk, \quad \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} H k dk = 6T_2 \int_0^{\infty} H k dk. \quad (3.40)$$

Конечно в (3.40) спектральная функция $H(k)$ должна убывать при k , меньшем некоторого k' , $k'l \gg 1$, $k'l_1 \gg 1$. В противном случае само уравнение хотя и останется справедливым (и соответствует медленно меняющейся на расстоянии r корреляционной функции H_{ii} в (3.38), рассматриваемой при $r \ll l, l_1$), но применимо все же лишь при $kl \gg 1$, $kl_1 \gg 1$, и интегралы в (3.40) при малых k не будут определены.

Из уравнений (3.40) следует, что энергия пульсаций (экспоненциально) возрастает. Кроме того, масштаб пульсаций падает, как и предсказывалось в подразд. 4. В факте уменьшения масштаба можно убедиться следующим образом. Введем эффективный волновой вектор $k' = \int_0^{\infty} H k dk \left(\int_0^{\infty} H dk \right)^{-1}$. Нетрудно получить, пользуясь (3.40), что

$$dk'/dt = 2T_2 k', \quad (3.41)$$

откуда видно, что k' — эффективный волновой вектор (экспоненциально) растет, т. е. масштаб падает.

Сравним показатель экспоненты для $k'(t)$, равный $2T_2$, с показателем экспоненты для $\int_0^{\infty} H dk$, равным $4T_2$. Последний пока-

затель больше. Это означает, грубо говоря, что энергия растет быстрее, чем падение масштаба. Есть ли это ответ на вопрос, поставленный в подразд. 1 (где обсуждаются два конкурирующих процесса: рост энергии поля и падение масштаба)? Вопрос о том, что же преобладает: первый или второй процесс? *Качественно*, да: рост поля превалирует над падением масштаба. Но это еще не строгое доказательство наличия динамо мелкомасштабного поля. Решение этого вопроса (главного в этой главе) мы приводим в подразд. 7.

Отметим в заключение подраздела, что для уравнения (3.39) невозможно поставить задачу на собственные функции. Это видно уже из (3.40) и (3.41): собственная функция не меняет своего масштаба. Формально в этом можно убедиться, если все же ее сформулировать: $H(k, t) = \exp(-Et)H_m(k)$. Общее решение (3.39) при таком задании $H(k, t)$ есть

$$H_m = ak^{\alpha_1} + bk^{\alpha_2}, \quad (3.42)$$

$$\alpha_{1,2} = 1/2 \{ -1 \pm [1 - 4(4 + E_m/T_2)]^{1/2} \}.$$

Если потребовать, чтобы H_m была корреляционной функцией, т. е. не меняла знак, то показатели α_1, α_2 в (3.42) должны быть действительными. Но в этом случае $H_m(k)$ расходится либо при $k \rightarrow 0$, либо при $k \rightarrow \infty$, и тем самым H_m не может быть собственной функцией.

6. Общие свойства уравнения для корреляционной функции магнитных полей

Рост энергии поля. Главное утверждение подразд. 1 о росте энергии магнитных флуктуаций можно получить непосредственно из точного решения (2.30). Запишем

$$\langle (\partial x_i / \partial a_m) (\partial x_j / \partial a_f) \rangle \langle H_m(\mathbf{a}) H_f(\mathbf{a}) \rangle = \langle H_i(\mathbf{x}) H_j(\mathbf{x}) \rangle$$

вместо (3.35) и (3.36). Очевидно, что $\langle H_i(\mathbf{x}) H_j(\mathbf{x}) \rangle = 1/3 \delta_{ij} \langle H^2(t) \rangle$, $\langle H_m(\mathbf{a}) H_f(\mathbf{a}) \rangle = 1/3 \delta_{mf} \langle H^2(0) \rangle$. Следовательно,

$$\langle H^2(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \right\rangle \langle H^2(0) \rangle. \quad (3.43)$$

Полезно сопоставить это выражение с (3.8), описывающим рост среднеквадратичного градиента скалярной примеси. Рост среднеквадратичной энергии поля виден из того, что средний квадрат $\partial x_i / \partial a_j$ возрастает в турбулентном потоке. Две частицы, находившиеся первоначально на расстоянии δa друг от друга, удаляются (в среднем) друг от друга. Расстояние δx в момент t больше, чем δa . Следовательно, $|\partial x_i / \partial a_j|$ возрастает.

Как отмечалось в подразд. 1, рост среднеквадратичного поля сопровождается уменьшением масштаба. Допустим (временно), что это не так. Пусть, например, спектральная функция $H(k)$ убывает при возрастании волнового вектора и при $k > k_1$ (k_1 —

некоторый волновой вектор) она вообще обращается в нуль. Тогда согласно (3.43) она будет неограниченно возрастать. В реальной ситуации это не так, масштаб флюктуаций падает до тех пор, пока не вступит в действие омическое затухание. В этот момент решение (2.30) уже перестанет адекватно описывать динамику пульсаций, и поэтому выражение (3.43) станет несправедливым.

Задача на собственные функции. Эрмитовость оператора. В предыдущем подразделе отмечалось, что задача на собственные функции для супермелкомасштабных полей, т. е. для уравнений (3.38), (3.39), не может быть поставлена. Такое же заключение можно сделать в общем случае, когда выписано решение для среднеквадратичных флюктуаций в виде (3.43). Действительно, рост поля мог бы быть экспоненциальным. Это не противоречит выражению (3.43). Но это означало бы, что рост поля не сопровождается уменьшением масштаба.

В то же время задача на собственные функции *полного* уравнения для H_{ij} может быть поставлена. Это означает, что используется полное уравнение (1.7), т. е. учитывается диссипация, $D \neq 0$. Уравнение для H_{ij} во всей области k -пространства в общем случае не может быть получено. Но здесь полезно посмотреть марковскую модель, в которой такое уравнение можно получить. В этом случае в правую часть (3.38) добавится член $D\Delta H_{ii}$, а в правую часть (3.39) — член $-2Dk^2 H_{ii}$. Эти дополнительные члены и ответственны за диссипацию. Теперь выражения (3.40) и вывод о росте эффективного волнового вектора k' по (3.41) годятся только для не слишком больших волновых векторов:

$$k \ll k_H = (T_2/D)^{1/2}. \quad (3.44)$$

В частности, k' тоже мало по сравнению с k_H . Итак, динамика флюктуаций такова. Эффективный волновой вектор возрастает до тех пор, пока не достигнет значения $k' \approx k_H$. При этом одновременно растет энергия поля. После этого динамика поля определяется (нижней) собственной функцией.

Напомним, что уравнение для мелкомасштабных пульсаций (3.39) справедливо при $kl \gg 1$, $kl_1 \gg 1$. Эти неравенства в совокупности с (3.44) не всегда могут быть выполнены. Условия применимости (3.44) будут выписаны далее. Укажем, что если эти неравенства противоречивы, и тем самым уравнение (3.39) не имеет области применимости, все соображения о включении диссипации при $k = k_H$ (но уже новом k_H , не совпадающим с (3.44)) сохраняются. В марковской модели, в которой диссипация учитывается регулярным образом, учет ее приводит к наличию члена $D\Delta H_{ij}$ в общем уравнении для магнитных пульсаций. При этом получается уравнение для собственных функций типа уравнения Шредингера (второго порядка с неоднородными коэффициентами). Собственные функции (в виде корреляционных) существуют, только если $D \neq 0$, иначе происходит вырождение уравнения.

В общем случае немарковской турбулентности учет диссипации не может быть проведен. Запишем полное точное уравнение

для $H(k, t)$:

$$\partial H(k, t)/\partial t = \int A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) H(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}. \quad (3.45)$$

При $k \ll k_H$ это уравнение известно. Оно имеет вид (3.39). При $k \gg k_H$ можно, очевидно, записать

$$\partial H/\partial t = -2DHk^2. \quad (3.46)$$

Только при $k \approx k_H$ вид его неизвестен. Тем не менее об общем уравнении (3.45) можно сделать одно важное утверждение. Поставим задачу на собственные функции этого уравнения и сопряженного ему:

$$-E_m H_m = \int A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) H_m(\mathbf{q}) d\mathbf{q},$$

$$-E_m^* \tilde{H}_m = \int A^*(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \tilde{H}_m^*(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (3.47)$$

Система собственных функций \tilde{H}_m сопряжена (дуальна) системе собственных функций H_m . Покажем, что оператор в правой части (3.47) может быть сведен к эрмитовому. Это означает, в частности, что H_m простым образом выражается через \tilde{H}_m и одно из уравнений (3.47) получается из другого.

Воспользуемся для этого системой доказательств, изложенной в гл. II, подразд. 7, но модифицированной для магнитного поля (напомним, что в гл. II, подразд. 7, речь шла о самосопряженности оператора для корреляционной функции пульсаций скалярной примеси). Составим уравнение, сопряженное точному (1.7): $\partial \tilde{\mathbf{H}}/\partial t = -[\mathbf{v} \text{ rot } \tilde{\mathbf{H}}] - D \text{ rot rot } \tilde{\mathbf{H}}$. Оно совпадает с уравнением для вектор-потенциала \mathbf{A} (1.45) магнитного поля (с точностью до несущественного градиента произвольной функции), если воспользоваться преобразованием (2.58).

Это означает, что уравнение для спектральной функции поля $\tilde{\mathbf{H}}$ так связано с уравнением для спектральной функции поля \mathbf{H} , как спектральное уравнение для вектор-потенциала связано с соответствующим уравнением для \mathbf{H} . Иными словами, одно из уравнений (3.47) должно следовать из другого при замене $\tilde{H}_m(k)/k^2 \rightarrow H_m(k)$. Отсюда следует

$$k^{-2} A^*(\mathbf{k}, \mathbf{q}) q^2 = A(\mathbf{q}, \mathbf{k}). \quad (3.48)$$

Перейдем к новой собственной функции

$$z_m(k) = \frac{1}{k} H_m(k). \quad (3.49)$$

Пользуясь свойством (3.48), видим, что для функции z_m оператор в правой части самосопряжен. Итак, уравнение для собственных функций обладает полной системой собственных функций, все собственные значения действительны. Если известны z_m , то с помощью (3.49) можно получить $H_m(k)$, а собственные значения E_m совпадают с собственными значениями, полученными из уравнения для z_m .

Для нахождения собственных значений можно воспользоваться вариационным принципом, справедливым для самосопряженных операторов:

$$E = - \int z^*(k) k^{-1} A(k, \mathbf{q}) q z(q) dq dk / \int z^*(k) z(k) dk, \quad (3.50)$$

$$\delta E = 0, \quad \int z^*(k) z(k) dk = \text{const.}$$

Здесь мы пришли к аналогии с квантовой механикой, о которой упоминалось в гл. I, подразд. 5. Там было указано, что для уравнения (1.7) постановка задачи на собственные значения не вполне эквивалентна поискам уровня в яме в задаче Шредингера (это уравнение не является самосопряженным). Для спектральных функций случайных полей, как оказывается, задача полностью аналогична поиску захваченных состояний в квантовой механике.

Ясно, что если найдется такая пробная функция $z(k)$, которая придаст функционалу (3.50) отрицательное значение, то нижняя собственная функция (с собственным значением $E_0 = \min E_m$) придаст функционалу (3.50) еще большее по модулю отрицательное значение. Отсюда следует, что $E_0 < 0$, и экспоненциально растущее решение (динамо-решение) с инкрементом $|E_0|$ существует. На языке уравнения Шредингера это означает, что «потенциал» уравнения (3.47) содержит яму, в которой уместается по меньшей мере один уровень. Отметим также, что спектр собственных функций (3.47) содержит бесконечное множество положительных собственных значений (инфинитное движение в квантовой механике). Это видно из r -представления записи общего уравнения (3.45) при асимптотически больших k , т. е. из фурье-представления (3.47):

$$\partial H_{ii}(r, t) / \partial t = 2D \Delta H_{ii}(r, t). \quad (3.51)$$

Собственные функции (3.51) должны быть супермелкомасштабными (иначе асимптотика (3.51) несправедлива), т. е. $r \ll l, l_1$, r — характерный масштаб изменения H_{ii} , и, кроме того, $v_k r \ll \ll D$. Это условие соответствует преобладанию диссипации над генерацией. Ясно, что собственные функции (3.51) имеют вид, пропорциональный $\exp(-ik_m r)$, а собственные значения $E_m = k_m^2 D$. Множество E_m ничем не ограничено сверху. Нетрудно убедиться в том, что частный случай общего уравнения (3.45) — уравнения для супермелкомасштабных полей (3.39) — тоже обладает свойством (3.48).

Сформулируем вариационный принцип для корреляционного тензора H_{ij} . Для этого запишем уравнение для него в общем виде:

$$\partial \hat{H} / \partial t = \hat{A} \hat{H}, \quad (3.52)$$

\hat{A} — оператор, не зависящий от времени. Представим \hat{A} в виде $\hat{A} = \Delta \hat{L}$. Тогда сопряженное уравнение можно выписать так:

$$\partial \hat{H}_1 / \partial t = \hat{L} \Delta H_1, \quad (3.53)$$

\hat{H}_1 — решение сопряженного уравнения, тильда указывает на сопряженность. Как сказано выше, уравнение (3.53) должно совпадать с уравнением корреляционного тензора вектор-потенциала магнитного поля. Это означает, что от уравнения (3.53) можно перейти к (3.52), если выразить вектор-потенциал H_1 через \hat{H} . Поскольку для однородного и изотропного магнитного поля $\hat{H} = -\Delta\hat{H}_1$, то для перехода от (3.53) к (3.52) достаточно взять оператор Лапласа от (3.53). Переход осуществится, если $\hat{\tilde{L}} = \hat{L}$, т. е. оператор \hat{L} самосопряжен, или (поскольку $\hat{L} = \Delta^{-1}A$) $\Delta^{-1}\hat{A}\Delta = \hat{\tilde{A}}$ (аналог соотношения (3.48)). Здесь введен Δ^{-1} — оператор, обратный оператору Лапласа, он не определен однозначно. Доопределим его так. Действие Δ^{-1} на функцию $f(\mathbf{x})$ эквивалентно умножению фурье-образа $f(\mathbf{x})$, т. е. $f(\mathbf{k})$, на величину $-k^{-2}$. Учитывая, что оператор Δ (как и Δ^{-1}) отрицательно определенный и эрмитов (в базисе фурье-гармоник он диагонален и все диагональные элементы отрицательны и равны $-k^2$), составим частное Рэлея. Иначе говоря, сформируем вариационный принцип:

$$E = \int \hat{z} \hat{A} \Delta \hat{z} d\mathbf{r} / \int \hat{z} \Delta \hat{z} d\mathbf{r}. \quad (3.54)$$

Рассмотрим более общий случай однородного, но не изотропного магнитного поля. Введем для этой цели оператор rot^2 , который определяется следующим образом. Пусть rot^2 действует на \hat{p} , тогда в индексном виде $\{\text{rot}^2 \hat{p}\}_{ij} = \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} \partial_a \partial_c p_{bd}$. Представим \hat{A} из уравнения (3.52) в виде $\hat{A} = -\text{rot}^2 \hat{L}$. Оператор rot^2 эрмитов, и поэтому уравнение, сопряженное (3.52), может быть записано в форме $\partial \hat{H}_1 / \partial t = -\hat{\tilde{L}} \text{rot}^2 \hat{H}_1$ (ср. с (3.53)). Естественно, что связь между магнитным полем \hat{H} и вектор-потенциалом \hat{H}_1 будет иметь вид $\hat{H} = -\text{rot}^2 \hat{H}_1$ (знак минус появился в результате того, что оператор rot^2 действует на одну точку ${}^1\mathbf{x}$ или ${}^2\mathbf{x}$). И поэтому действие оператора rot^2 на уравнение для \hat{H}_1 вернет нас к (3.52). Но оператор rot^2 не является положительно (или отрицательно) определенным. У него есть нулевые собственные значения. Это видно из того, что существует решение $\text{rot}^2 \hat{p} = 0$, $p_{ij} = \partial_i \partial_j \varphi$, в то время как при действии положительно (отрицательно) определенного оператора на произвольное \hat{p} должно привести к существенно положительному (отрицательному) результату.

Мы приходим к следующему выводу. Вариационный принцип можно сформулировать для H_{ij} только тогда (и соответственно уравнение для H_{ij} сводится к самосопряженному только тогда), когда оператор rot^2 , переводящий корреляционный тензор вектор-потенциала в H_{ij} , может быть заменен на любой знакоопределенный оператор. Для изотропного процесса таким оператором, как мы видели выше, является $-\Delta$. Это знакоопределенный оператор. В общем случае анизотропного процесса программа действий должна быть такова. Во-первых, необходимо выяснить общий вид тензора \hat{H} как решения уравнения (3.52) и тензора \hat{H}_1 — решения

сопряженного уравнения (3.53). Во-вторых, следует выяснить, можно ли найти знакоопределенный оператор, переводящий \hat{H}_1 в H . Если да, то вариационный принцип записывается в виде (3.53), где Δ заменяется на этот найденный оператор. Если нет, то вариационный принцип не может быть введен. В ряде случаев программу действий для вывода вариационного принципа можно упростить. Достаточно выписать уравнение, сопряженное с (3.52), т. е. (3.53), что делается без труда. Затем попытаемся получить (3.52) из (3.53) с помощью знакоопределенного оператора, например действуя на (3.53) оператором Лапласа.

7. Динамо супермелкомасштабных полей

Область существования супермелкомасштабных полей. Уравнение динамики супермелкомасштабных полей (3.39) получено в модели (3.33). Выпишем область применимости (3.39) в k -пространстве:

$$\frac{2\pi}{l}, \frac{2\pi}{l_1} \ll k \ll k_H = \sqrt{T_2/D}. \quad (3.55)$$

Обсудим, в каких случаях существует в турбулентности область (3.55). Здесь имеются две возможности.

1. Прежде всего, такая область существует заведомо для маломодовой турбулентности. Маломодовая турбулентность является случайным процессом, в котором возбуждено небольшое количество фурье-амплитуд. Примером такой турбулентности служит странный аттрактор (см. гл. II, подразд. 3). Пусть в проводящей среде возбуждены лишь фурье-амплитуды с волновыми векторами $k_0 = 2\pi/l$. Тогда второй масштаб l_1 отсутствует в турбулентности. Кроме того, поскольку T_2 имеет размерность частоты, то по порядку величины $T_2 = \nu/l$. Тогда условие существования области (3.55), т. е. $2\pi/l \ll (T_2/D)^{1/2}$, есть $R'_m \gg 1$. Это, конечно, естественное условие, без которого нечего и говорить о динамо мелкомасштабных полей. Отметим в связи с этим, что генерация крупномасштабного поля возможна и при $R'_m \ll 1$. Дело в том, что омическая диссипация крупномасштабного поля происходит за время L^2/D , в то время как генерация за счет α -эффекта (см. гл. II) — за время L/α . Для слабопроводящей среды $\alpha \approx \langle \nu \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle l^2/D$, и условие преобладания генерации над диссипацией $L^2/D \gg L/\alpha$ всегда может быть выполнено за счет большого масштаба поля L . Что касается мелкомасштабных полей, то здесь генерация возможна, только если $R'_m \gg 1$.

2. В колмогоровской турбулентности имеется малый масштаб l_1 . Он определяется тем, что для пульсаций скорости этого масштаба число Рейнольдса равно единице (см. гл. II, подразд. 2, $R_1 = \nu_1 l_1 / \chi = 1$). С другой стороны, T_2 определяется наибольшей характерной частотой пульсаций. Частота растет с волновым вектором и максимальна для пульсаций масштаба l_1 . Здесь она дости-

гает значения v_1/l_1 . Подставляя эти оценки в (3.55), имеем $v_1 l_1 / D \gg \gg 1$. Иначе говоря, магнитное число Рейнольдса, подсчитанное для наименьших пульсаций, должно быть велико. В сочетании с тем, что при этом $R_1 = 1$, получаем условие существования области (3.55) для колмогоровской турбулентности:

$$\chi \gg D, \quad (3.56)$$

или, что эквивалентно, $R'_m \gg R$. Здесь уже имеются в виду числа Рейнольдса, подсчитанные для основного масштаба турбулентности l .

Вывод о генерации супермелкомасштабных полей. Обратимся к задаче на собственные функции общего уравнения (3.45) [72]. Для решения вопроса о том, имеются ли отрицательные собственные значения, воспользуемся вариационным принципом (3.50). Будем выбирать пробные функции в виде

$$z = (k^n / (2n + 2)!^{1/2}) \exp(-k/k_2) (2/k_2)^{2n+3/2},$$

причем k_2 находится в интервале (3.55). Тогда при интегрировании по \mathbf{q} вклад области с $q \geq k_H$ экспоненциально мал. Действительно, обратное утверждение о существенном вкладе интеграла при $q \geq k_H$ означало бы, что согласно уравнению (3.45) (в которое вместо $H(q)$ подставляется $z(q)q$, что тоже экспоненциально мало при $q \approx k_H$) динамика поля с масштабом $L = 2\pi/k_2$ определяется омической диффузией. Это находится в противоречии с хорошо известным фактом, что для поля масштаба $L = 2\pi/k_2 \gg 2\pi/k_H$ выполняется условие вмороженности, т. е. в основном уравнении (1.7) омическая диффузия не играет роли.

В то же время ясно, что при интегрировании по \mathbf{q} вклад области $q < 2\pi/l_1$ тоже весьма мал, поэтому для подсчета (3.50) можно пользоваться приближенным представлением уравнения (3.45) в области (3.55), т. е. уравнением (3.39). Тогда все вычисления становятся простыми, и нетрудно видеть, что пробные функции с $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ придают функционалу (3.50) отрицательное значение. Следовательно, супермелкомасштабные поля генерируются. Иначе говоря, при условии, когда область (3.55) существует в турбулентности, вопрос о динамо решается положительно: турбулентность вызывает генерацию мелкомасштабного поля.

Вывод о генерации поля можно получить несколько проще. Будем интересоваться поведением собственной функции в области (3.55). Вид ее в этой области выписан в (3.42). Уместно подчеркнуть, что, как говорилось в конце подразд. 5, уравнение (3.39) невозможно решать на собственные функции. Здесь же рассматривается задача на собственные значения общего уравнения (3.45) и исследуется поведение собственного решения в области (3.55). Тогда можно пользоваться уравнением (3.39), имея в виду, что на него накладываются (неизвестные нам) граничные условия при малых и больших k . Но даже без граничных условий можно судить о собственной функции. Для этого воспользуемся свойст-

вом нижней собственной функции самосопряженных операторов. отсутствием у нее узлов, т. е. тем, что она не меняет знака. Из общего решения (3.42) следует, что узлы будут отсутствовать, если α_1, α_2 действительны. Из выражения для $\alpha_{1,2}$ видно, что это будет иметь место, если $E_0 < -15/4 T_2$, E_0 — нижнее собственное значение. Итак, $E_0 < 0$, и динамо-решение имеет место.

Динамика супермелкомасштабных полей в реальной турбулентности. До сих пор мы пользовались моделью (3.33). Можно ожидать, что в общем случае уравнение (3.39) останется справедливым. Дело здесь обстоит точно так же, как с однородными пульсациями скалярной примеси. Как показано в подразд. 3, учет членов более высокого порядка, чем выписанные в (2.64), не меняет вид уравнения для однородной примеси. Иными словами, для однородной скалярной примеси модель (2.70) оказывается адекватной реальной турбулентности.

Для обоснования того, что именно так и обстоит дело с магнитными полями, будем действовать по аналогии с подразд. 3. Прежде всего, уравнение для $H(k, t)$ должно быть (для супермелкомасштабных полей) типа (3.31) — уравнения для спектра пульсаций примеси. Ясно, что для близких чатиц величины $d(\partial x_i / \partial a_j) / dt$ связаны лишь с коэффициентами размерности частоты. Поэтому для магнитных флюктуаций и должно получаться уравнение (3.31), где коэффициент T_2 обладает такой размерностью (а коэффициенты a_0, a_1, a_2 — безразмерные числа). С помощью разложения (3.32) показываем, что уравнение для $H(k, t)$ не должно содержать производных по k выше второго порядка.

Сами коэффициенты a_0, a_1, a_2 (один из которых можно, конечно, положить равным единице, пусть $a_2 = 1$) выяснить гораздо труднее. Единственное, что можно сразу сказать, что требование эрмитовости (3.48) записывается в виде $a_1 = 2a_2 = 2$ (как в (3.39)). Относительно коэффициента a_0 ничего сказать с помощью таких простых соображений нельзя.

Необходимо более подробно проанализировать уравнение для p_4 , из которого и получается (3.39). Рассмотрим общее уравнение для p_4 , т. е. будем считать, что в (3.33) выписаны только первые члены разложения по дифференциальным операторам. Прежде всего, любой член должен содержать производные, действующие на точки, от которых зависят тензоры при функции p_4 . Например, член четвертого порядка

$${}^1\partial_i^2 \partial_j^3 \partial_f^2 \partial_m T_{ijfm} ({}^1x, {}^2x, {}^3x) p_4 \quad (3.57)$$

может содержаться в разложении. Действительно, пусть тензор \hat{T} зависит дополнительно от 4x (а дифференциального оператора, действующего на четвертую точку, нет в (3.57)). Проинтегрируем все выражение для $\partial p_4 / \partial t$ по 4a . Слева получится выражение, которое не должно зависеть от 4x , поскольку $\int p_4 d{}^4a$ не зависит от 4x (см. гл. II, подразд. 8), в то время как член (3.57) зависит от 4x . Мы пришли к противоречию. Именно по этой причине члены второго порядка по ${}^2\partial_i$ в (3.33) остаются такими в общем случае,

какими они и выписаны там. Ничего другого не появляется. Невозможно сделать тензор T_{ij} зависящим от трех или четырех точек. Тензор T_{ij} должен зависеть только от двух точек. Но тогда при интегрировании (3.33) по двум другим точкам мы должны вернуться к уравнению для двухточечной функции распределения (2.70). Отсюда следует, что T_{ij} , выписанный для p_4 , совпадает с тензором T_{ij} в (2.70).

Обратимся к анализу членов выше второго порядка. Третья степень по ∂_i отсутствует из требования самосопряженности оператора (ср. с подразд. 3). Члены четвертого порядка с операторами, действующими на две точки типа ${}^1\partial^1\partial^2\partial^2\partial$, должны отсутствовать в нашем разложении. Действительно, проинтегрируем этот член по двум другим точкам 3x , 4x , и мы должны вернуться при этом к уравнению для p_2 . Последнее не содержит членов четвертого порядка (см. подразд. 3), в то время как наш член типа ${}^1\partial^1\partial^2\partial^2\partial$ дает вклад в разложение для p_2 .

Рассмотрим члены четвертого порядка типа (3.57). Необходимо прежде всего выписать все комбинации, симметричные по перестановкам жидких частиц:

$$({}^1\partial_i{}^2\partial_j{}^3\partial_f{}^1\partial_m + {}^1\partial_i{}^2\partial_j{}^3\partial_f{}^2\partial_m + {}^1\partial_i{}^2\partial_j{}^3\partial_f{}^3\partial_m)T_{ijfm}({}^1x, {}^2x, {}^3x)p_4. \quad (3.58)$$

Аналогичные члены можно сконструировать с \hat{T} , зависящим от 1x , 2x , 4x ; 1x , 3x , 4x и 2x , 3x , 4x .

Покажем, что члены типа (3.58) отсутствуют в разложении (3.33). Для этого напомним, что p_4 обращается в нуль, если какие-либо две точки совпадают. Выписанный в (3.58) член будет сохранять это свойство, только если $\hat{T}({}^1x = {}^2x, {}^3x) = \hat{T}({}^1x, {}^2x = {}^3x) = 0$, т. е. тензор в (3.58) обращается в нуль при совпадении любых двух точек. Пусть ${}^3x = {}^4x$. Тогда все выражения типа (3.58), кроме самого (3.58), и с тензором, зависящим только от точек 1x , 2x , 4x , обращаются в нуль. При этом выражение с точками 1x , 2x , 4x содержит тензор \hat{T} , совпадающий с тем, что выписано в (3.58), где только 3x заменено на 4x — это следует из симметрии относительно замены точек ${}^3x \rightarrow {}^4x$. Тогда первые два члена в круглой скобке (3.58) сокращаются с соответствующими членами подобного выражения с точками 1x , 2x , 4x , поскольку при приближении точки 3x к 4x p_4 зависит лишь от ${}^4x - {}^3x$, что эквивалентно замене ${}^4\partial_i$ на $-{}^3\partial_i$. Третий же член в круглой скобке не сокращается с соответствующим в выражении с точками 1x , 2x , 4x (имеющим вид ${}^1\partial_i{}^2\partial_j{}^4\partial_f{}^4\partial_m$): при замене ${}^4\partial_i$ на $-{}^3\partial_i$ он удваивается. Именно он не сохраняет свойство $p_4 = 0$ при ${}^3x = {}^4x$, и поэтому все члены типа (3.58) обращаются в нуль.

Рассмотрим последний возможный член четвертого порядка

$${}^1\partial_i{}^2\partial_j{}^3\partial_f{}^4\partial_m T_{ijfm}({}^1x, {}^2x, {}^3x, {}^4x)p_4. \quad (3.59)$$

При совпадении любых двух точек тензор в (3.59) должен обращаться в нуль (так же как в (3.58)).

Теперь целесообразно образовать форму, аналогичную (3.2):

$$\Phi_2 = \int F(1x) F^*(2x) F(3x) F^*(4x) \Theta_4(1x, 2x, 3x, 4x) d^1x d^2x d^3x d^4x, \quad (3.60)$$

которая не должна стать отрицательной. Используем функцию $F(x)$ в виде

$$F(x) = C_1 \delta(x - x_1) + C_2 \delta(x - x_2) + C_3 \delta(x - x_3) + C_4 \delta(x - x_4), \quad (3.61)$$

а Θ_4 можно представить как $\Theta_4 = \Theta'(1x) \Theta'(2x) \Theta'(3x) \Theta'(4x)$. Для того чтобы $\Phi_2 = 0$, необходимо выполнение $C_1 \Theta'(x_1) = 0$, $C_2 \Theta'(x_2) = 0$, $C_3 \Theta'(x_3) = 0$, $C_4 \Theta'(x_4) = 0$. Далее, производная $d\Phi_2/dt$ в момент $t = t_0$ не должна быть отрицательной, если $\Phi_2 = 0$ при $t = t_0$. Составим выражение для $d\Phi_2/dt$ для (3.33) и рассмотрим тот вклад, который даст (3.59) в это выражение. Не будем выписывать громоздкое выражение. Скажем только, что оно, наподобие (3.28), содержит множитель

$$\sum C_i C_j^* C_l C_m^*. \quad (3.62)$$

Индексы пробегают значения от 1 до 4, причем никакие из двух индексов не совпадают. Этот множитель не является знакоопределенным. Следовательно, выражение (3.59) тоже не может присутствовать в разложении (3.33).

Итак, в разложении (3.33) вообще отсутствуют члены четвертого порядка по дифференциальному оператору. Вернемся к обсуждению общего вида уравнения для спектральной функции $H(k, t)$. При выводе этого уравнения в подразд. 5 мы брали производную по времени от (3.36) и заменяли $\partial p_4 / \partial t$ в правой части согласно (3.33). При переносе действия дифференциальных операторов на все выражение под интегралом в (3.36) появятся выражения с тем же количеством операторов ∂_i , что и в самом рассматриваемом члене в уравнении для p_4 , и с меньшим количеством. Меньшее количество соответствует тому, что оператор ∂_i действует также на все выражение в интеграле перед p_4 в (3.36). Поскольку это выражение квадратично по координатам, снижение порядка будет не более чем на два. Иначе говоря, из членов второго порядка по ∂_i возникают члены без производных для корреляционной функции, наподобие последнего в круглой скобке (3.38), из членов четвертого порядка — члены третьего и второго. Но, поскольку, как мы выяснили, членов четвертого порядка нет в разложении (3.33), члены второго порядка, кроме выписанных в (3.38), не появляются.

Что касается вклада членов шестого порядка по ∂_i , которые могут присутствовать в разложении (3.33), то, как было выяснено, они добавили бы производные шестого, пятого и четвертого порядков в уравнение (3.38). Но такие дополнительные члены недопустимы в (3.38). Дело в том, что такого рода члены с коэффициентами размерности частоты имеют вид $r^6 T_6^6 \partial H_{ii}$, $r^5 T_5^5 \partial H_{ii}$,

$r^4 T_4^4 \partial H_{ii}$, что в фурье-пространстве приведет к появлению производных $\partial/\partial k$ шестого, пятого и четвертого порядков — дополнительных членов в (3.39). Однако, как мы выяснили, уравнение (3.39) должно быть второго порядка. То же самое можно сказать и про члены более высокого порядка (чем шестой) в (3.33) (они не дадут вклада в (3.39)).

Итак, заключение следующее. Уравнение (3.39) является универсальным для описания супермелкомасштабных магнитных полей. Модель (3.33) адекватна реальной турбулентности, если ею пользоваться для описания однородных супермелкомасштабных полей. Заключение о турбулентном динамо мелкомасштабных магнитных полей, сделанное в предыдущем разделе настоящего подраздела для модели (3.33), относится к реальной турбулентности.

8. Уравнение динамики мелкомасштабных полей

Здесь мы получим уравнение для магнитных полей, масштаб которых $L \leq l$. Уравнение для H_{ij} в общем случае может быть записано в виде

$$\partial \hat{H} / \partial t = \partial \partial \hat{T}_2 \hat{H} + \partial \partial \partial \partial \partial \hat{T}_6 \hat{H} + \dots \quad (3.63)$$

при учете следующих факторов.

1. Уравнение для \hat{H} может быть разложено по дифференциальным операторам, поскольку основное уравнение для \mathbf{H} (1.7) дифференциальное. Здесь дело обстоит точно так же, как со скалярной примесью (см. гл. II, подразд. 7).

2. Тензор \hat{H} является корреляционным тензором соленоидального поля, поэтому он может быть представлен в виде

$$H_{ij} = \langle \text{rot}_i \mathbf{A}(\mathbf{x}) \text{rot}_j \mathbf{A}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (3.64)$$

Следовательно, все интегралы $\int H_{ij} d^3 \mathbf{x} = \int H_{ij} d^3 \mathbf{x}$ должны обращаться в нуль. Это свойство будет сохраняться уравнением (3.63), если дифференциальные операторы стоят слева всего выражения, как и выписано в (3.63). Для упрощения записи мы не пишем в этом выражении индексы у операторов ∂_i .

3. В уравнении (3.63) выписан член второго порядка по ∂_i (порождающий члены, пропорциональные \hat{H} , $\partial \hat{H}$, $\partial \partial \hat{H}$) и шестого порядка. Члены третьего, четвертого и пятого порядков отсутствуют в (3.63), поскольку в разложении для $\partial p_4 / \partial t$ отсутствуют соответствующие члены соответствующих порядков, а только они могли бы породить члены такого типа (см. подразд. 7).

4. Тензоры \hat{T}_2 , \hat{T}_6 зависят только от \mathbf{r} ввиду однородности турбулентности.

Дальнейший анализ (3.63) можно было бы проводить подобно анализу для спектральной функции скалярной примеси в подразд. 3, 4. Здесь, однако, выражения будут слишком громоздкими, и нам пришлось бы иметь дело с многоиндексными выра-

жениями. Проще проанализировать члены высокого порядка в уравнении для p_4 , т. е. положить, что (3.33) есть лишь разложение, в котором выписаны члены наинизшего порядка по дифференциальному оператору. В предыдущем подразделе мы показали, что члены четвертого порядка по ${}^{\alpha}\partial_i$ отсутствуют в разложении (3.33). Для анализа членов шестого порядка достаточно оставить только те члены, в которых содержатся операторы, действующие не менее чем на три точки (остальные обращаются в нуль, см. подразд. 7).

Рассмотрим сначала члены, содержащие операторы, действующие на все четыре точки. Тензоры при членах такого типа обращаются в нуль при совпадении любых двух точек: только таким образом свойство $p_4 = 0$ при совпадении двух точек сохраняется. Это означает, что в выражении для $d\Phi_2/dt$ при F , определяемой из (3.61), эти члены дадут вклад с множителем (3.62), что недопустимо. Остаются теперь лишь выражения, содержащие операторы, действующие на три точки. Доказательство того, что и они обращаются в нуль, в точности совпадает с соответствующим доказательством для членов (3.58). Аналогичный анализ может быть проведен для членов более высокого порядка.

Окончательно результат следующий. Уравнение (3.33) адекватно описывает реальную турбулентность. Оно не только физически реализуемо и описывает немарковский процесс. К нему уже невозможно добавить члены более высокого порядка по дифференциальному оператору. Следовательно, оно достаточно для описания реальной турбулентности при $t \gg \tau$.

Утверждению о том, что (3.33) — точное уравнение, соответствует отсутствие члена шестого порядка в (3.63). Выпишем уравнение для \hat{H} с использованием (3.33). Для вывода его берем производную от (3.36) по времени, заменяем $\partial p_4/\partial t$ согласно (3.33) и выражаем полученный результат опять через \hat{H} с помощью (3.36). Тогда получим уравнение для \hat{H} , которое выпишем в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial H_{ij}/\partial t &= \partial_m \partial_n (\delta_{mn} T H_{ij} + T_{in} H_{mj} + T_{mj} H_{in} - T_{mn} H_{ij} - \\ &- T_{ij} H_{mn}), \\ \partial H_{ij}/\partial t &= \sum_{\alpha, \beta}^2 \tilde{\epsilon}_{iabc} \tilde{\epsilon}_{jmnf} \alpha \partial_a \beta \partial_m T_{bn} (\alpha \mathbf{x}, \beta \mathbf{x}) H_{cf}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\tilde{\epsilon}_{iatc} = \epsilon_{iak} \epsilon_{kbc}.$$

Выражение (3.65) получено для однородного процесса, т. е. $H_{ij} = H_{ij}(\mathbf{r})$. Изотропия здесь не предполагалась. Что касается тензора T_{ij} , то он определяется самой турбулентностью, поэтому он тоже зависит только от \mathbf{r} . Уравнение (3.65) действительно имеет дивергентный вид, как и (3.63), что связано с соленоидальностью поля \mathbf{H} . Необходимо проверить важнейшее свойство корреляционного тензора соленоидального поля $\partial_i H_{ij} = 0$. Действие оператора ∂_i на правую часть (3.65) должно обратить ее в нуль. Не-

посредственной проверкой убеждаемся в том, что так оно и получается.

Рассмотрим поведение среднеквадратичного поля (или средней плотности энергии поля). Для этого достаточно положить $r = 0$ в (3.65). Результат следующий:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} H_{ii}(0, t) = -\frac{1}{3} H_{ii}(0, t) (\Delta T_{jj})|_{r=0} > 0. \quad (3.66)$$

Правая часть положительна (энергия H_{ii} положительна) и $-\Delta T_{jj}(r=0) > 0$, поскольку вторая производная от корреляционной функции при $r = 0$ всегда отрицательна. Уравнение (3.66) имеет экспоненциально растущее решение, эквивалентное выражению (3.43). Но, как неоднократно отмечалось, никакого заключения о поведении магнитного поля при $t \rightarrow \infty$ отсюда сделать невозможно. Дело в том, что характерный масштаб поля уменьшается, или — в данном случае более конкретно — корреляционная длина тензора H_{ij} падает. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не вступит в действие омическое затухание и (3.66) перестанет быть справедливым.

Выражение (3.66) соответствует строгому равенству $r = 0$. Для бесконечно малого расстояния r , т. е. для малого, но не равного нулю r , можно воспользоваться разложением T_{ij} в форме (3.6). Подставляя это выражение в (3.65), возвращаемся к (3.38). Итак, уравнение для супермелкомасштабных полей получается из (3.65) при малых r . Переходя опять к пределу $r \rightarrow 0$, получим $\frac{1}{2} dH_{ii}(0, t)/dt = 5T_2 H_{ii}(0, t)$, в точности совпадающее с (3.66), поскольку $\Delta T_{jj}(r=0) = -15T_2$. Здесь полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. При $r \rightarrow 0$ в уравнении (3.65) исчезает высшая (вторая) производная. Особенно ясно видно это из более простого уравнения (3.38). Математически это обстоятельство соответствует вырождению уравнения (3.65) при малых r . Физически это связано все с тем же уменьшением масштаба. Дело вот в чем. Сводя уравнение (3.38) к уравнению Шредингера, нетрудно убедиться в том, что собственная функция слишком медленно убывает вне потенциальной ямы, это связано с особенностью в потенциальной яме, в свою очередь связанной с вырождением уравнения при $r \rightarrow 0$. Следовательно, невозможно решать задачу на собственные функции уравнения (3.38). Если бы существовала «хорошая» собственная функция этого уравнения (т. е. удовлетворяющая свойствам корреляционной функции), то это означало бы существование решения уравнений (3.65) и (3.38) без уменьшения масштаба. Мы уже упоминали в конце подразд. 5 о невозможности постановки задачи на собственные функции спектрального представления (3.38), т. е. уравнения (3.39).

Имеется другой физический аспект, объясняющий вырождение уравнения (3.65). Коэффициент при второй производной имеет размерность коэффициента диффузии. В то же время динамика супермелкомасштабных полей (так же как супермелкомасштабной скалярной примеси) должна определяться коэффициентами

с размерностью частоты (см. подразд. 5). Именно поэтому в (3.38) имеется лишь коэффициент T_2 с размерностью частоты. Здесь невозможно дописать член $T'\Delta B$, поскольку T' обладает размерностью коэффициента диффузии. Не случайно в (3.65) коэффициент T (имеющий размерность коэффициента диффузии) сокращается и фактически не входит в это уравнение. Он выписан только для упрощения общей записи уравнения.

Учет омического затухания снимает вырождение. В марковской модели просто в правой части (3.65) добавляется член $D\Delta H_{ij}$, который при $r \rightarrow 0$, конечно, остается. В немарковской турбулентности можно записать, что при очень малых r уравнение (3.65) должно в пределе перейти в (3.51). Преимущество марковской модели в этом отношении состоит в том, что она описывает и промежуточную ситуацию, когда вмороженность еще имеет место, но и диссипация уже существенна. Иначе говоря, в марковской модели можно описать не только вмороженные поля с $R_m \gg 1$, но и поля с $R_m \approx 1$ (ну и, конечно, поля с $R_m \ll 1$, которые корректно описываются с помощью ряда теории возмущений по параметру R_m). В немарковской турбулентности удастся описывать поля только при $R_m \gg 1$ (это есть уравнение (3.65)) и при $R_m \ll 1$. Зато достоинством немарковского описания является, очевидно, то, что реальная турбулентность не является марковской. В любом случае постановка задачи на собственные значения с учетом омической диссипации корректна.

Отметим еще одно важное обстоятельство, касающееся поведения H_{ij} при малых r . В подразд. 7 была указана область k -пространства, в которой уравнение (3.39) справедливо. Наличие такой области в турбулентности будет обеспечено, если $R'_m \gg R$ или выполняется (3.56). Тогда и (3.39), и (3.38), и, наконец, (3.66) будут обоснованы (конечно, до тех пор, пока не вступит в действие омическая диффузия). Что же можно сказать о поведении энергии и вообще о поведении H_{ij} при малых r , если (3.56) не выполняется? Пока ничего. Эти выражения уже явно оказываются несправедливыми. Для того чтобы убедиться в этом, объясним физический смысл нарастания энергии согласно (3.66). В колмогоровской турбулентности рост энергии магнитного поля, обусловленный возмущениями скорости v_k (см. определение в гл. II, подразд. 2), происходит за время $(v_k k)^{-1}$. Это время минимально (т. е. скорость роста максимальна) для наименьшего масштаба l_1 и равно l_1/v_1 .

Пусть нас интересует поведение магнитных флюктуаций, энергия которых сосредоточена первоначально при малых k , $k \ll 2\pi/l_1$. За очень короткое время l_1/v_1 флюктуации магнитного поля возникнут при $k \approx 2\pi/l_1$. Дело в том, что неоднородное поле скорости возбуждает флюктуации масштаба, равного масштабу неоднородности скорости, даже если магнитное поле строго однородно. Этого, кстати, нельзя сказать про скалярную примесь: если $\theta = \text{const}$, то $\partial\theta/\partial t = 0$, и флюктуации θ не возбуждаются. Поведение магнитного поля в этом смысле аналогично градиенту

скалярной примеси. Именно это обстоятельство — возбуждение пульсаций наименьшего масштаба — отражено в (3.66). Выражение — $\Delta T_{ii}(\mathbf{r} = 0) = 15T_2$ как раз и есть по порядку величины v_1/l_1 . Если же $R'_m \ll R$, то флюктуации магнитного поля масштаба l_1 не будут уже заморожены в жидкость, и утверждение о росте пульсаций такого масштаба окажется несправедливым. Несправедливым окажется также и (3.66), дающее слишком быстрое нарастание поля.

Резюмируем сказанное в этом подразделе. Уравнение (3.65) адекватно описывает поведение флюктуаций магнитного поля в реальной (однородной, изотропной) турбулентности несжимаемой жидкости. Оно справедливо в случае, если выполняются оба неравенства:

$$R_m \gg 1, R'_m \gg 1. \quad (3.67)$$

Второе из этих условий необходимо для мелкомасштабного динамо (и, кстати, необязательно для крупномасштабного). Первое условие означает, что флюктуации поля заморожены в вещество. При выполнении только второго неравенства могут существовать пульсации поля столь мелкомасштабные, что для них $R_m \lesssim 1$ и (3.65) неприменимо. Более конкретно, для турбулентности с $R'_m \gg R$ второе неравенство выполняется автоматически, в то время как первое суть $v_1 L^2 / l_1 D \approx T_2 L^2 / D = L^2 k_H^2 \gg 1$, L — масштаб пульсаций магнитного поля. При $L \ll l_1$ уравнение (3.65) переходит в (3.38) и выражение (3.66) справедливо. Для турбулентности с $R'_m \ll R$ второе неравенство (3.67) должно, конечно, по-прежнему выполняться. Первое же неравенство переписываем в виде $v_k / kD \gg 1$, $k = 2\pi/L$. Отсюда определяем новый граничный волновой вектор k_D (с учетом того, что $v_k \sim k^{-1/3}$, см. гл. II, подразд. 2)

$$k_D = (v_l / D l^{1/3})^{3/4} = (R'_m)^{3/4} \frac{1}{l} \quad (3.68)$$

ср. с (2.9)). Выражая k_H через числа R и R'_m : $k_H = l^{-1} R^{1/4} (R'_m)^{1/4}$, получим общий критерий применимости уравнения (3.65):

$$k \ll l^{-1} \min \{ R^{1/4} (R'_m)^{1/2}, (R'_m)^{3/4} \}. \quad (3.69)$$

9. Динамо мелкомасштабных полей

В подразд. 7 получен вывод о генерации мелкомасштабных полей для турбулентности с предельно большими магнитными числами Рейнольдса ($R'_m \gg R$). Там показано, что такой же вывод может быть сделан для маломодовой турбулентности типа странного аттрактора. Анализ более общего уравнения (3.65), которое справедливо и тогда, когда $R'_m < R$, позволяет сделать заключение о генерации поля в общем случае. В этом подразделе мы покажем, что такое заключение действительно можно сделать. От-

метим, что можно было бы рассматривать два случая ($R'_m < R$ и $R'_m \gg R$) сразу, анализируя уравнения (3.65). Тогда ситуация $R'_m \gg R$ получилась бы как частный случай. Однако, на наш взгляд, физика дела от такого изложения проиграла бы и все изложение стало бы менее понятным.

Запись уравнения (3.65) в упрощенном виде. Уравнение (3.65) тензорное. Его полезно выписать в фурье-представлении (для спектральных функций), где оно уже становится скалярным:

$$\begin{aligned} \partial H(k, t) / \partial t &= -2k^2 T H + \int [k^2 + q^2 - (\mathbf{kq})][k^2 - (\mathbf{kq})^2 / q^2] \times \\ &\times [u(p) / p^2] H(q) d\mathbf{q}, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{k} - \mathbf{q}, \\ H_{ij}(\mathbf{r}) &= \int H_{ij}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \\ T_{ij}(\mathbf{r}) &= \int u_{ij}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \\ u_{ij}(\mathbf{k}) &= u(k) \sigma_{ij}(\mathbf{k}), \quad H_{ij}(\mathbf{k}) = H(k) \sigma_{ij}(\mathbf{k}), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{k}) &= 1/2 (\delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}), \\ T_{ij}(\mathbf{r} = 0) &= \delta_{ij} T, \quad T = 1/3 \int u(k) d\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Оператор в правой части (3.70) не является самосопряженным, но сводится к таковому при замене $H(k)/k \rightarrow z(k)$, что соответствует изложенному в подразд. 6. В частности, свойство (3.48) непосредственно вытекает из (3.70). Область применимости уравнения (3.70) вписана в (3.69). Запись уравнения (3.65) в спектральном виде — (3.70). Оно дает нам возможность убедиться в том, что (3.65) сохраняет корреляционные свойства тензора H_{ij} . Для этого достаточно показать, что (3.70) сохраняет свойства спектральной функции $H(k, t)$, т. е. уравнение (3.70) не приводит к существованию отрицательных участков спектра. Покажем это. Для того чтобы стать отрицательной, функция $H(k, t)$ должна пройти через нуль. Пусть $H(k, t_0)$ в точке $k = k_0$ при $t = t_0$ обращается в нуль. Тогда первый член правой части (3.70) тоже обращается в нуль в этой точке, в то время как второй существенно положителен. Это означает, что $\partial H(k_0, t_0) / \partial t > 0$ и в точке $k = k_0$ $H(k, t)$ не может стать отрицательной. Впрочем, этот результат следовало ожидать из того, что уравнение (3.65) есть следствие физически реализуемого процесса (3.33).

При $R'_m \gg R$ уравнение (3.70) переходит в (3.39). Для того чтобы убедиться в этом, необходимо учесть, что для больших k вклад в интеграл правой части (3.70) дают малые p . Это означает, что $H(q)$ можно разложить по степеням p . В нулевом приближении ($p = 0$) $\mathbf{k} = \mathbf{q}$ и $H(q) = H(k)$. В целом разложение имеет вид

$$\begin{aligned} H(q) &= H(k) - \frac{\mathbf{kq}}{k} \frac{\partial H(k)}{\partial k} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{kp})^2}{k^2} \frac{\partial^2 H(k)}{\partial k^2} + \right. \\ &\left. + \left(p^2 - \frac{(\mathbf{kp})^2}{k^2} \right) \frac{1}{k} \frac{\partial H(k)}{\partial k} \right]. \end{aligned}$$

Достаточно ограничиться выписанными членами. Кроме того, удобно сделать замену переменных $q \rightarrow p$ в (3.70). Тогда выражения в квадратных скобках в (3.70) следует переписать через p :

$$\left[k^2 + q^2 - (\mathbf{kq}) \right]_l k^2 - \frac{(\mathbf{kq})^2}{q^2} \Big] = [k^2 + p^2 - (\mathbf{kp})] \frac{k^2 p^2 - (\mathbf{kp})^2}{k^2 + p^2 - 2(\mathbf{kp})}.$$

Интеграл в (3.70) разобьется на сумму моментов, там будут члены типа $k^2 H(k) \int u(p) dp = 3Tk^2 H(k)$ (нулевой момент для функции $u(p)$), которые сократятся с первым членом правой части (3.70), стоящим перед интегралом, и типа $H(k) \int p^2 u(p) \times \times dp \sim T_2 H(k)$ (второй момент для функции $u(p)$). Последние выражения, содержащие второй момент T_2 , останутся и дадут (3.39).

Напомним, что $u(p) p^2 \sim p^{-1/3}$ (см. (3.9)). Следовательно, нулевой момент сходится при больших p , и величина T есть по порядку величины vl (коэффициент турбулентной диффузии), т. е. величина этого момента определяется основным масштабом турбулентности l . Что касается второго момента, то, поскольку $u(p) p^4 \sim p^{-1/3}$, интеграл расходится при больших p . Он поэтому обрезается вязкостью, т. е. волновым вектором $p = 2\pi/l_1$. Именно поэтому T_2 определяется самыми мелкомасштабными пульсациями ($T_2 \approx v_1 l_1$) (см. подразд. 7). Теперь по-новому становится ясно, почему для турбулентности с умеренными магнитными числами Рейнольдса ($R'_m < R$) нельзя пользоваться приближенным уравнением (3.39). Если мы повторим приведенные выше вычисления для перехода от (3.70) к (3.39), то столкнемся со вторым моментом T_2 (нулевой момент по-прежнему сокращается и не входит в ответ), который обрезается при $p \sim 2\pi/l_1$. Но для очень больших волновых векторов само уравнение (3.70) уже не справедливо. Между тем основной вклад в интеграл T_2 дают предельно большие волновые векторы $p \approx 2\pi/l_1$.

Рассмотрим поведение магнитных флюктуаций для турбулентности с $R'_m \ll R$ в промежуточной области

$$k_D \ll k \ll k_1 = 2\pi/l_1, \quad (3.71)$$

в которой уравнение (3.65) неприменимо. Вместе с тем ясно, что динамика полей в этой области контролируется омическим затуханием. Этот случай является обратным предельному случаю $R'_m \gg 1$ — случаю полной вмороженности. Здесь, наоборот, вмороженность не существенна и может рассматриваться как возмущение, наложенное на омическую диффузию. Такая задача была рассмотрена Г. Голицыным [73]. Пульсации магнитного поля в слабопроводящей среде возбуждаются (см. [73]) на фоне однородного поля. Мы имеем аналогичную ситуацию. Роль однородного поля играют магнитные поля с волновыми векторами $k < k_D$. Они являются квазиоднородными для пульсаций с $k \gg k_D$. Уравнение (1.7) можно представить для области (3.71) приближенно в виде

$$0 = (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{v} + D \Delta \mathbf{H}. \quad (3.72)$$

Временная производная мала по сравнению с $D\Delta H$. Действительно, для пульсаций с волновым вектором k $\partial H_k/\partial t \sim H_k/\tau(k)$ ($\tau(k)$ — время корреляции), а $D\Delta H_k \approx Dk^2 H_k$. Пользуясь тем, что $\tau(k) = 1/v_k k$ (см. гл. II, подразд. 2), получаем, что в области (3.71) $1/\tau(k) \ll Dk^2$, что и обосновывает отбрасывание $\partial H/\partial t$ в (3.72). Вектор \mathbf{H}_0 играет роль крупномасштабного поля ($\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_k$ с $k < k_D$). В (3.72) отсутствует член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}_0$, очевидно, малый по сравнению с $(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v}$. Кроме того, в (3.72) отсутствуют члены $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}$. Они малы по сравнению с \mathbf{H}_0 , если $H \ll \ll H_0$. То, что это именно так, мы увидим по результату. Переходя к фурье-представлению (3.72) и составляя спектральный тензор, получим

$$H(k, t) = 1/3 (E(k)/D^2 k^4) \int H(q) dq. \quad (3.73)$$

Интеграл в (3.73) фактически обрезается при $q = k_D$, это видно из самого выражения для $H(k)$ по (3.73): оно быстро убывает с ростом k , и при $q > k_D$ энергия пульсаций мала и дает пренебрежимо малый вклад в интеграл. Более точно: можно просто заметить этот интеграл согласно $\int H(q) dq = \langle H_0^2 \rangle$. Теперь видно, что (3.73), справедливое только при $k \gg k_D$, есть не уравнение, а решение. Спектр $H(k, t)$ зависит лишь от $\langle H_0^2 \rangle$. Зависимость от времени здесь параметрическая — тоже через $\langle H_0^2 \rangle$. Иначе говоря, зависимость от времени $H(k, t)$ при $k \gg k_D$ определяется динамикой магнитных пульсаций при $k \ll k_D$. Согласно (3.73) и с использованием (2.9) получим для спектра мощности магнитных пульсаций

$$E_H(k, t) = 4\pi H(k, t) k^2 \sim k^{-1/3}. \quad (3.74)$$

Это есть спектр Голицына [73].

Уравнение (3.65) можно записать для скалярных функций в r -представлении. Эта запись будет особенно полезна в дальнейшем. Для этого выразим тензоры $H_{ij}(\mathbf{r})$ и $T_{ij}(\mathbf{r})$ через продольные корреляционные функции H_{LL} и T_{LL} соленоидальных полей (см. [42]):

$$H_{ij} = \left(H_{LL} + \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} H_{LL} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} H_{LL} r_i r_j r^{-2},$$

$$T_{ij} = \left(T_{LL} + \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} T_{LL} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} T_{LL} r_i r_j r^{-2}.$$

Теперь тензорное уравнение (3.65) выразится в терминах скалярных функций H_{LL} и T_{LL} . Выпишем это уравнение в инерционной области (2.5). Точнее, если $R'_m \gg R$, то уравнение будет справедливым во всей инерционной области $l_1 \ll r \ll l$. Если же $R'_m \ll R$, то уравнение справедливо в более узкой области (где соблюдается замороженность):

$$(2\pi/k_D) \ll r \ll l. \quad (3.75)$$

Нам потребуется выражение для T_{LL} в инерционной области. Оно

имеет вид

$$T_{LL} = A - T_\alpha r^\alpha, \quad (3.76)$$

где $\alpha = 4/3$ (ср. с (3.10)), A — константа (размерность коэффициента турбулентной диффузии), T_α — тоже константа. Выражению (3.76) соответствует следующий вид T_{ij} в инерционной области: $T_{ii}(r) = T\delta_{ij} - T'_{ij}r^{-2/3}(r^2\delta_{ij} - 2/5 r_i r_j)$, коэффициент $2/5$ появляется из требования $\partial_i T_{ij} = 0$. Следует иметь в виду, что (3.76) неприменимо при малых r , величина r должна быть больше $2\pi/k_D$ (согласно (3.57)) либо l_1 . При меньших r выражение T_{LL} (так же как T_{ii} в (3.10)) ведет себя как $T_{LL}(0) - r^2 T_2$ и имеет неограниченное число производных в нуле. Дело в том, что при $k \gg 2\pi/l_1$ (а именно эти k ответственны за поведение $T_{LL}(r)$ в нуле) спектр обрезается вязкостью и быстро убывает (см. гл. II, подразд. 2). Моменты высокого порядка $\int p^n u(p) dp$ сходятся, поэтому и $T_{LL}(r)$ имеет неограниченное число производных в нуле.

С учетом (3.76) уравнение для H_{LL} имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial H_{LL}}{\partial t} = T_\alpha r^{\alpha-2} \left[r^2 \frac{\partial^2 H_{LL}}{\partial r^2} + (\alpha + 4)r \frac{\partial H_{LL}}{\partial r} + (\alpha^2 + 3\alpha) H_{LL} \right]. \quad (3.77)$$

Вывод о генерации мелкомасштабных полей. Прежде всего отметим, что в марковской модели для учета диссипации в правую часть (3.77) следует добавить член

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} H_{LL} + 4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} H_{LL} \right), \quad (3.78)$$

который дал бы вклад для корреляционной функции, существенно меняющейся на расстоянии меньшем, чем $2\pi/k_D$. Этот дополнительный член снимает вырождение с (3.77). Перейдем к задаче на собственные функции полного уравнения для H_{LL} . Оно в области (3.75) переходит в (3.77). Нетрудно убедиться в том, что функцией, сопряженной H_{LL} , будет $r^4 H_{LL}$. Для этого достаточно выписать уравнение, сопряженное (3.77), и показать, что если H_{LL} — решение уравнения (3.77), то $r^4 H_{LL}$ — решение сопряженного уравнения. Причем дополнительный член (3.78) тоже обладает этим же свойством. Следовательно, вариационный принцип записывается в виде

$$E = \left\{ -T_\alpha \int_0^\infty \left[r^{\alpha+2} z^2(r) (\alpha^2 + 3\alpha) - \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 r^{\alpha+1} \right] dr \right\} \left(\int_0^\infty z^2(r) r^4 dr \right)^{-1}. \quad (3.79)$$

Здесь $\delta E = 0$, z — пробная функция, δE — вариация функционала. Подставим в (3.79) следующую пробную функцию:

$$z = r^{-\alpha/2} \exp(-r/r_0). \quad (3.80)$$

Значение r_0 лежит в области (3.75). Она дает пренебрежимо малый вклад в функционал (3.79) при малых r , $r \ll 2\pi/k_D$, а также при $r \gg l$. Именно поэтому функционал записан не в общей форме, а с использованием уравнения (3.77). Вид общего уравнения для данной пробной функции несуществен. Подсчет функционала в (3.79) довольно прост и дает $E < 0$, т. е. функционал принимает отрицательное значение.

Итак, турбулентность с умеренными R'_m , $R'_m \ll R$ тоже возбуждает мелкомасштабные магнитные поля.

10. Характер усиления мелкомасштабных полей

Инкремент нарастания поля. Пробная функция (3.80) дает правильный порядок величины инкремента нарастания поля, а именно $|E| = T_\alpha r_0^{\alpha-2} = T_\alpha r_0^{-2/3}$. Оценку величины T_α проще всего сделать из соображений размерности ($T_\alpha = \nu l^{-1/3}$). Тогда для инкремента нарастания поля получаем

$$|E| = \nu l^{-1/3} r_0^{-2/3}. \quad (3.81)$$

Это выражение полезно сравнить с $1/\tau(k)$ — обратным временем корреляции для колмогоровской турбулентности. Мы видим, что $|E|$ совпадает с $1/\tau(k)$, если $k \approx 1/r_0$. Именно с такой скоростью (с инкрементом $\nu_k k$) должно нарастать поле (если оно вообще нарастает) с волновым вектором k .

Максимальный инкремент достигается для полей наименьших возможных масштабов. Для турбулентности с $R'_m \ll R$ масштаб $2\pi/k_D$, с $R'_m \gg R$ масштаб совпадает с наименьшим масштабом турбулентности l_1 . Общую для всех случаев оценку запишем с использованием (3.69) в виде

$$\max |E| = \nu l^{-1/3} r_0^{-2/3}, \quad (3.82)$$

$$r_0^{-1} = l^{-1} \min [R^{1/4} (R'_m)^{1/2}, (R'_m)^{3/4}].$$

Нижняя собственная функция с собственным значением E_0 , $E_0 = \min E_m$, имеет максимальный инкремент (поскольку $E_0 < 0$). Корреляционная длина ее определяется минимальным r_0 согласно (3.82). Это, конечно, вполне естественный результат. В подразд. 1 мы отмечали, что как рост поля, так и уменьшение его масштаба происходит за время l/ν . Если рассматривается многомодовая турбулентность колмогоровского типа, то следует говорить о возбуждении пульсациями скорости масштаба $2\pi/k$. Тогда это время есть $(\nu_k k)^{-1}$. Пульсации наименьших масштабов наиболее эффективны, поскольку $(\nu_k k)^{-1} \sim k^{-2/3}$.

Динамика мелкомасштабных полей с произвольными начальными данными определяется выражением

$$H(k, t) = \sum_m \exp(-E_m t) H_m(k) a_m. \quad (3.83)$$

Поскольку уравнение для $H(k, t)$ сводится к эрмитовому виду, в общее решение (3.83) входят только собственные функции $H_m(k)$ (присоединенные функции, как в (1.41), не возникают), и все E_m действительны. Характер множества собственных значений $\{E_m\}$ существенно зависит от того, есть турбулентное динамо или нет его. Действительно, именно множество $\{E_m\}$ определяет характерные времена процесса (3.83). Наименьшая характерная частота v/l — обратное время изменения пульсаций магнитного поля масштаба l , наибольшая частота выписана в (3.82). Если турбулентное динамо имеет место, то нижнее собственное значение (будучи отрицательным) совпадает с $\max |E|$ по (3.82). Оно определяет быстрое изменение (рост) пульсации минимального масштаба. Более медленному изменению поля (масштаба l) отвечают E_m с $m \gg 1$. Напомним, что при $m \rightarrow \infty$ все E_m положительны, следовательно, имеются промежуточные E_m , близкие к нулю. Более конкретно, такие, что $|E_m| \approx v/l \ll |E_0|$. Если бы турбулентного динамо не было, то нижнее собственное значение (будучи положительным) должно было бы оцениваться как $E_0 \approx v/l$. Действительно, если бы наименьшая E_m (в данном случае наименьшая характерная частота процесса (3.83)) была много больше v/l , то согласно (3.83) все поле затухло бы за время гораздо меньшее, чем l/v . Между тем пульсации поля масштаба l не могут так быстро исчезнуть. В частности, для динамического спектра скалярной примеси тоже имеет место разложение (3.83), где все $E_m > 0$. И нижнее собственное значение $E_0 \approx v/l$. Именно поэтому, получив вывод о турбулентном динамо мелкомасштабного поля, мы одновременно имеем результат: инкремент роста поля определяется максимальной характерной частотой задачи (3.82).

Полезно еще раз вернуться к уравнению (3.77) и по-новому убедиться в том, что оно дает динамо. Если бы (3.77) давало только экспоненциально затухающие решения, то, как сказано выше, нижнее собственное значение оценивалось бы как $E_0 \approx v/l$. Для соответствующей собственной функции левая часть (3.77) была бы (в инерционной области) малой по сравнению с правой, так что левую часть (3.77) можно было бы в первом приближении заменить нулем. Тогда общее решение правой части записывается в виде

$$H_{LL} = ak^{\beta_1} + bk^{\beta_2},$$

$$\beta_{1,2} = 1/2 \{-(3 + \alpha) \pm [(3 + \alpha)^2 - 4\alpha(3 + \alpha)]^{1/2}\}.$$

При $\alpha = 4/3$ величины $\beta_{1,2}$ комплексные. Это означает, что H_{LL} осциллирует. Но нижняя собственная функция не может менять знак! Поэтому это решение не годится. Следует считать, что $|E_0| \gg v/l$, и левая часть (3.77) уже не мала по сравнению с правой, и решение не записывается в виде степенных функций вида $ak^{\beta_1} + bk^{\beta_2}$. Но теперь нет необходимости решать это уравнение. Ибо, как сказано выше, имеется дилемма: либо $|E_0| \approx v/l$

и поле затухает, либо $|E_0| \gg v/l$, тогда (необходимо) $E_0 < 0$ и динамо имеет место. Итак, простой анализ уравнения (3.77) с дополнительными физическими соображениями подтверждает строгое рассмотрение с помощью вариационного принципа.

Интересно отметить, что пробная функция $z(r)$ в (3.79) не должна удовлетворять требованиям, предъявляемым к корреляционной функции. То же самое можно утверждать относительно вариационного принципа в фурье-пространстве (3.50): $z(k)$ не должна быть непременно спектральной функцией, т. е. не менять знака. Действительно, допустим вариационный принцип (3.50) привел нас к заключению (с какой угодно пробной функцией $z(k)$), что $E_0 < 0$. Возможно ли, чтобы $E_0 < 0$, но $H_0(k)$ не было спектральной функцией? Ответ на этот вопрос отрицательный. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к динамическому решению (3.83). Если бы $H_0(k)$ меняло знак и $E_0 < 0$, то в разложении (3.83) вообще не должна бы содержаться эта гармоника, $a_0 = 0$. В противном случае при $t \rightarrow \infty$ нижняя гармоника, имея наибольший инкремент, «задавила» бы все остальные и функция $H(k, t)$ стала бы тоже менять знак, что недопустимо. Далее, согласно подразд. 6 оператор (3.45) общего уравнения для $H(k, t)$ сводится к эрмитовому. Система собственных функций уравнения, сопряженного к (3.45), или, что то же самое, система функций, взаимная (дуальная) системе $\{H_m(k)\}$, может быть выражена через собственные функции вектор-потенциала магнитного поля

$$\tilde{H}_m(k) = \alpha_m H_m(k) k^{-2}. \quad (3.84)$$

Здесь множитель α_m введен для нормировки $\int \tilde{H}_m(k) H_m(k) dk = 1$ (по m не суммируется!). Следовательно, коэффициенты a_m в (3.83) определяются выражением

$$a_m = \alpha_m \int H(k, t_0) H_m(k) k^{-2} dk. \quad (3.85)$$

В частности, отсюда же определяется и a_0 (при $m = 0$). Утверждение $a_0 = 0$ соответствует тому, что интеграл в (3.85) обращается в нуль при $m = 0$. Это, конечно, невыполнимое требование. Напомним, что $H(k, t_0)$ — произвольная положительно определенная функция. Она определяет (произвольные) начальные данные. Пусть, например, $H_0(k)$ меняет знак, и при $k < k_1$ она положительна, в точке $k = k_1$ обращается в нуль, а далее, при $k > k_1$, отрицательна. Зададим, что $H(k, t_0)$ обращается в нуль при $k \geq k_1$, а при $k < k_1$ положительна. Тогда (3.85) уже не будет обращаться в нуль и $a_0 \neq 0$. Итак, вывод следующий: пробную функцию для вариационного принципа можно брать любой. Главное — убедиться в том, что какая-нибудь пробная функция придаст функционалу отрицательное значение: это будет означать, что потенциальная яма достаточно глубока для того, чтобы содержать связанное состояние с $E_0 < 0$, и динамо имеет место.

Сравнение случаев $R'_m \gg R$ и $R'_m \ll R$. Мы показали, что пульсации с волновым вектором \mathbf{k} взаимодействуют с флюктуациями магнитного поля с тем же волновым вектором \mathbf{k} с харак-

терным временем $(v_k k)^{-1}$, совпадающим со временем корреляции $\tau(k)$. Можно сказать, что взаимодействие магнитного поля с полем скоростей носит как бы локальный характер. Действительно, взаимодействие магнитного поля, характеризующегося волновым вектором \mathbf{k} , с пульсациями скорости с волновым вектором $k_0 \ll k$ носит характер искажения мелкомасштабного поля в квазирегулярном поле скорости. Время искажения $(v_k k_0)^{-1}$ гораздо больше, чем $(v_k k)^{-1}$, и поэтому взаимодействие поля с крупномасштабными пульсациями гораздо менее эффективно по сравнению с взаимодействием пульсаций того же масштаба. Взаимодействие поля с очень мелкомасштабными флюктуациями поля, т. е. $k \ll k_2$ ($1/k_2$ — характерный масштаб пульсаций), описывается турбулентной вязкостью. Характерное время диссипации поля за счет мелкомасштабной вязкости есть $k_2/v_k k^2$ (тоже большое по сравнению с $(v_k k)^{-1}$). Итак, в то время как нарастание полной энергии поля определяется согласно подразд. 7 самыми мелкомасштабными пульсациями, динамика поля с данным фиксированным волновым вектором k определяется пульсациями скорости v_k с теми же волновыми векторами.

В этом смысле взаимодействие локально.

Воспользуемся этим свойством для того, чтобы сопоставить генерацию поля в турбулентности с $R'_m \gg R$ с генерацией в турбулентности с $R'_m \ll R$. И в том и в другом случае имеется область в k -пространстве, где поле заморожено в вещество, т. е. $R'_m \gg 1$, $R_m \gg 1$. Рассмотрим турбулентность с $R'_m \gg R$. Пусть спектральная функция поля скорости $E(k)$ искусственно обрезана при $k > k_2$. Иначе говоря, заменим реальную турбулентность на такую же, но со спектральной функцией $E_1(k)$, отличающуюся от $E(k)$ только при $k > k_2$: $E_1(k) = E(k) \theta(1 - k/k_2)$, $k_2 \ll k_D$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$. Новая турбулентность ничем не отличается от обычной при $k < k_2$, только при $k > k_2$ все пульсации скорости искусственно подавлены. Тогда, как сказано выше, магнитное поле при $k \ll k_2$ взаимодействует с полем скорости обычным образом. Взаимодействие локально, и магнитное поле с волновым вектором k ($k \ll k_2$) не «чувствует» отсутствия пульсаций скорости с $k > k_2$. Но при $k \gg k_2$ уравнение для пульсаций магнитного поля известно: это есть супермелкомасштабное поле, и они описываются уравнением (3.39), в котором под T_2 следует понимать $T_2 = 1/15 \int p^2 u(p) \theta(1 - pk_2^{-1}) dp$. Здесь, однако, следует уточнить, что энергия магнитного поля сосредоточена при $k \ll k_2$, а область $k > k_2$ представляет «хвост» спектральной функции. В этом случае, как сказано в подразд. 5, уравнение (3.38) описывает динамику поля, корреляционная функция которого медленно убывает на длине $2\pi/k_2$, а (3.39) — поведение хвоста спектральной функции магнитного поля. Напомним, что в этом случае правая часть (3.38) есть просто разложение по малому параметру $1/k_2 L$ (L — характерный масштаб магнитных пульсаций, $1/k_2 L \ll 1$) и для его вывода не требуется использовать полное

уравнение для p_4 (3.33)! Достаточно раскладывать решение по малому параметру $1/k_2 L$.

В подразд. 7 показано, что если уравнение (3.39) законно, т. е. если существует область волновых чисел, где оно применимо, то турбулентное динамо мелкомасштабных полей имеет место. В данном случае, правда, нельзя для доказательства данного утверждения пользоваться вариационным принципом в том виде, как он используется в подразд. 7. Дело в том, что энергия пробной функции сосредоточена как раз в области применимости уравнения (3.39), в то время как теперь энергия сосредоточена при $k \ll k_2$. Для того чтобы показать, что турбулентное динамо имеет место в данном случае, здесь можно воспользоваться вторым способом, изложенным в подразд. 7, — общим решением уравнения (3.39) с требованием знаковой постоянности $H_m(k)$ — собственной функции. Хвост спектральной функции тоже, конечно, не должен менять знак, что приводит к требованию $E_0 < < -15/4 T_2 < 0$. Впрочем, этого еще недостаточно. Ведь уравнение (3.39) удовлетворяется для функции тождественно равной нулю. Но эта возможность означала бы, что спектральная функция магнитного поля не выходит, изменяясь во времени, из области $k < k_2$, и, следовательно, энергия поля неограниченно возрастала бы. Это следует из общего свойства (3.43), которое было бы справедливым неограниченно долго, если бы спектр пульсаций поля не выходил из области $k < k_2$. Итак, поле нарастает либо потому, что при $k > k_2$ его спектр не обращается в нуль, либо согласно (3.43). Вторая возможность, как неоднократно отмечалось, не может реализоваться, поскольку масштаб поля должен падать.

Мы приходим к следующему выводу. Турбулентность вызовет генерацию поля при $k \ll k_2$, если пульсации скорости при $k > k_2$ будут подавлены. Из локальности взаимодействия, т. е. независимости взаимодействия магнитного поля с полем скорости при определенных k от того, что происходит при волновых векторах, значительно отличающихся от k , следует, что в реальной турбулентности скорость генерации преобладает над скоростью перекачки энергии в область больших волновых чисел. Таким образом, искусственное обрезание спектра пульсаций скорости при $k_2 < k \ll k_D$ дает возможность сопоставить генерацию поля в турбулентности с $R'_m \ll R$ с турбулентностью с $R'_m \gg R$.

11. Динамика мелкомасштабных пульсаций магнитного поля при наличии маломодовой турбулентности

Маломодовая турбулентность. В гл. II, подразд. 3, указывалось на то, что турбулентность может развиваться, когда возбуждено небольшое число степеней свободы (или фурье-гармоник). Это явление стали называть странным аттрактором. В подразд. 7 мы показали, что если энергия всех гармоник сосредоточена

в спектральной области при $k \approx 2\pi/l$, то турбулентное динамо имеет место. Следует оговориться: в подразд. 7 подразумевалась изотропия турбулентности. Это означает следующее. Фурье-амплитуды v_k изотропно распределены в k -пространстве. Иначе говоря, поле скорости представимо в виде $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{u}_k \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})$, здесь $\mathbf{u}_k \neq 0$, если $k = k_0 = 2\pi/l$, и $\mathbf{u}_k = 0$, если $k \neq k_0$. Кроме того, все амплитуды удовлетворяют условию $\langle \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* \rangle = \text{const}$. Это и соответствует изотропии флуктуаций с разными волновыми векторами \mathbf{k} . Здесь включены все моды, волновой вектор которых по модулю равен k_0 , более точно, близок к величине k_0 , так как мы полагаем, что волновые векторы представляют собой дискретное множество (именно поэтому мы пишем сумму по волновым векторам, а не интеграл).

Последовательная постановка задачи для маломодового генератора должна формулироваться следующим образом. Следует рассматривать поле скорости, первоначально состоящее из минимального количества мод (фурье-гармоник), затем включать все большее и большее число гармоник. Таким образом, можно выяснить, какое минимальное число гармоник поля скорости необходимо для генерации магнитного поля. Такое рассмотрение дало бы возможность выяснить наиболее простые способы возбуждения поля. В гл. I, подразд. 7, мы показали, что простейшее движение — дифференциально вращающийся цилиндр — способно генерировать поле. Но импульсная модель, используемая там, не дает возможности выяснить инкремент нарастания поля. Стохастическая модель, т. е. модель, в которой поле скорости есть случайная функция, дает возможность рассмотреть вопрос в более общем виде. Действительно, уравнение для корреляционного тензора магнитного поля должно получиться, как можно надеяться, с эрмитовым оператором. Поэтому для определения инкремента нарастания поля можно пользоваться вариационным принципом. Последний дает возможность определить не только сам факт нарастания поля, но и (приближенно) инкремент. Если не пользоваться стохастической моделью, то нужно решать общее уравнение (1.7), которое не является эрмитовым.

Сформулируем программу действий для решения задач маломодовой генерации. Будем последовательно задавать поле скорости во все более и более усложненном виде. Начнем с задания скорости в простейшем виде:

$$\mathbf{v} = A_1 \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{x}) + \text{к. с.}, \quad (3.86)$$

$$A_1 \mathbf{k}_0 = 0, \quad (A_1^* [A_1 \mathbf{k}_0]) = 0.$$

Первое условие — ортогональность A_1 и \mathbf{k}_0 — соответствует несжимаемости, второе — ортогональность векторов A_1^* и $[A_1 \mathbf{k}_0]$ — выделяет одну поляризацию. Иначе говоря, комплексная амплитуда A_1 не только ортогональна вектору \mathbf{k}_0 , но и параллельна определенному (действительному) вектору: $A_1 = a_1 (a_1 + ia_2)$,

$\text{Im}(\alpha, a_1, a_2) = 0$. Движение (3.86) не генерирует магнитного поля, так как оно соответствует антидинамо-теореме (1.43) (кроме того, в стохастической модели мы считаем, что $D = \text{const}$). Простейшее усложнение поля скорости — это учет второй поляризации:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \exp(ik_0x) + \text{к. с.},$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{k}_0 = 0, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{k}_0 = 0, \quad (\mathbf{A}_1^* [\mathbf{A}_1 \mathbf{k}_0]) = 0, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = 0.$$

Но и такое движение тоже соответствует (1.43) и не генерирует поле. Следует отметить, что если дополнительно $(\mathbf{A}_2^* [\mathbf{A}_1 \mathbf{k}_0]) \neq 0$, то такое движение является простейшим винтовым. Нетрудно убедиться в том, что для такого движения $\text{vrotv} \neq 0$, т. е. поле скорости гиротропно. Динамо все же запрещено антидинамо-теоремами.

Дальнейшее усложнение модели — учет двух мод. Выпишем поле скорости в этом случае:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \exp(ik_0x) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \exp(ik_1x),$$

$$|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_1| = k_0, \quad \mathbf{B}_{1,2} = \beta_{1,2}(b_{1,2} + ic_{1,2}), \quad \beta_1, \beta_2 = 0,$$

$$\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 = 0, \quad \beta_1 \mathbf{k}_0 = \beta_1 k_0, \quad \text{Im}(\beta_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2}) = 0.$$

Если один из векторов (\mathbf{B}_1 либо \mathbf{A}_2) равняется нулю или одновременно \mathbf{A}_1 и \mathbf{B}_2 равны нулю, то движение лежит в одной плоскости и опять динамо невозможно. В общем случае поле скорости параллельно плоскости и генерация возможна, несмотря на то что движение двумерно: \mathbf{v} не зависит от направления, параллельного вектору $[\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1]$. Пример генерации винтовым движением (двумерным, но не плоским) приведен в гл. I, подразд. 6. Винтовое движение генерирует крупномасштабное поле. Мелкомасштабное поле генерируется, как мы увидим далее, гораздо более эффективно. Вопрос о стохастической генерации мелкомасштабного движения в двухмодовой модели не рассматривался.

Наконец, в трехмодовой модели следует учесть дополнительно член

$$(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) \exp ik_2x,$$

$$|\mathbf{k}_2| = k_0, \quad \mathbf{C}_{1,2} = \gamma_{1,2}(d_{1,2} + ie_{1,2}), \quad \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

$$\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_0 = 0, \quad \text{Im}(\gamma_{1,2}, d_{1,2}, e_{1,2}) = 0, \quad \gamma_2 \mathbf{k}_0 = \gamma_2 k_0.$$

В стохастической модели амплитуды $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ — случайные функции времени. В простейшем случае следует считать, что они не коррелируют друг с другом, кроме того, $\langle \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^* \rangle + \langle \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^* \rangle = \langle \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^* \rangle + \langle \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^* \rangle = \langle \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1^* \rangle + \langle \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2^* \rangle$. В трехмодовой модели удобно ввести систему координат, где ось x параллельна \mathbf{k}_0 , y — вектору \mathbf{k}_1 , z — вектору \mathbf{k}_2 . Уравнение для корреляционного тензора магнитного поля H_{ij} можно получить в этом случае без труда. В самом деле, общее уравнение (3.33) остается справедливым, а отсюда обычным способом выводится уравнение для $H_{ij}(\mathbf{r}, t)$. Оно имеет вид (3.55). Остается лишь определить тензор

T_{ij} . В принятой системе координат тензор T_{ij} диагонален:

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} f(r_2) + f(r_3) & 0 & 0 \\ 0 & f(r_1) + f(r_3) & 0 \\ 0 & 0 & f(r_1) + f(r_2) \end{vmatrix}.$$

Функция f должна удовлетворять свойствам корреляционной функции. Выражение ее через эйлеровы характеристики затруднительно. Да это и не требуется. Соленоидальность тензора, $\partial_i T_{ij} = 0$, проверяется без труда. Отметим, что гиротропность в системе отсутствует. Это связано с предполагаемой некоррелированностью мод. Следовательно, крупномасштабное поле генерироваться не будет: уравнение для среднего магнитного поля будет лишь диффузионного типа. Заметим дополнительно, что если вернуться к двухмодовой модели, то вместо выписанного тензора T_{ij} будем иметь тоже диагональный тензор, один из диагональных элементов которого обратится в нуль. А это эквивалентно тому, что вектор скорости лежит в определенной плоскости, и генерация поля, следовательно, невозможна. Подчеркнем еще раз, что, как отмечалось, двухмодовое движение хотя и допускает винтовой характер, но ввиду предполагаемой некоррелированности амплитуд средняя гиротропность отсутствует. Потому-то и невозможна генерация поля. Трехмодовая генерация мелкомасштабного поля с выписанным диагональным тензором T_{ij} , по-видимому, возможна.

Описание магнитного поля при наличии простейших движений. Рассмотренная выше (но нерешенная) трехмодовая модель все же недостаточно хорошо характеризует простоту движения. Поле скорости трехмерно и в общем сложно. Для того чтобы приблизить нашу модель к модели странного аттрактора и, кроме того, исследовать движение, которое в данный момент времени является простейшим, перейдем к рассмотрению следующей модели. Считаем, что поле скорости переключается скачком с одной моды на другую. Но в данный момент реализуется только одна мода с одной поляризацией.

Опишем модель более подробно. Разобьем промежуток времени на равные интервалы длиной τ . При $\tau(n-1) < t < n\tau$ (n — целое) возбуждена только одна мода. Иначе говоря, поле скорости на этом промежутке уже не зависит от времени и описывается (3.86), где $A_1 = \text{const}$. В следующий промежуток времени, $n\tau < t < (n+1)\tau$, включается новая мода. Эта мода характеризуется, вообще говоря, новыми волновым вектором k_0 и амплитудой A_1 . Новый волновой вектор статистически не зависит от старого, то же касается амплитуды: она некоррелируема со старой. Важно иметь в виду, что в каждый момент времени движение одномерно (имеется лишь зависимость от направления, параллельного волновому вектору). Кроме того, в каждый данный момент $v \text{rot} v = 0$, $av = 0$, $\text{rot} a = v$, причем это выполняется не в усредненном смысле, а в каждой точке.

Разумеется, движение в целом, т. е. на всем промежутке времени, не является одномерным. Поэтому генерация поля в принципе возможна. В то же время такая модель дает возможность выяснить наличие генерации поля для движения, простейшего в данный момент времени.

Дополнительно считаем, что во всей реализации скорости как волновой вектор, так и вектор амплитуды изотропно распределены в пространстве. Но модули волнового вектора и амплитуды постоянны. Генерация крупномасштабного поля в такой модели невозможна, так как в каждый момент $t \nabla \text{rot} \mathbf{v} = 0$, и поэтому, естественно, усреднение $\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}$ по ансамблю тоже дает нуль. Перейдем теперь к вопросу о динамике мелкомасштабных магнитных полей. Здесь возможно рассмотреть два случая. Для первого случая время τ мало:

$$\tau \ll 1/k_0 \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (3.87)$$

Напомним, что в течение промежутка времени длиной τ поле скорости постоянно и поэтому помнит о своем прошлом в течение этого промежутка. Переходя к новому промежутку времени, поле скорости скачком меняется на новое и забывает свое прошлое. Поэтому τ — время корреляции. Легко понять, что условие (3.87) соответствует белому шуму для поля скорости и марковскому процессу для магнитного поля. Решение задачи в таком случае получается из теории возмущений. Уравнение для H_{ij} совпадает с (3.65), где тензор T_{ij} совпадает с эйлеровым корреляционным тензором поля скорости, умноженным на τ . Генерация магнитного поля в такой модели была продемонстрирована в подразд. 9. Инкремент нарастания поля можно оценить следующим образом:

$$\gamma \approx k_0^2 \langle v^2 \rangle \tau. \quad (3.88)$$

Это следует из того, что единственная величина размерности частоты T_2 из подразд. 7—9 оценивается в данном случае как $T_2 \approx \approx k_0^2 \langle v^2 \rangle \tau$.

Во втором случае τ не мало:

$$\tau \gg 1/k_0 \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (3.89)$$

Перейдем к решению этой немарковской модели. Ввиду простоты поля скорости уравнение индукции (1.7) можно на каждом промежутке времени решить без труда. Но усреднение по ансамблю уже затруднительно. Воспользуемся поэтому лагранжевым подходом. Прежде всего поясним, что мы понимаем под усреднением. Очевидно, что процесс не полностью эргодичен. Например, усреднение по пространству в данной задаче лишено смысла. Дело в том, что поле скорости меняется регулярным образом (в виде синусоиды) в каждый момент времени. Возможно усреднение по промежуткам времени, большим, чем τ , или по ансамблю. Мы будем пользоваться последним. Необходимо разъяснить, что понимается под ансамблем. Пусть нам задана не одна реализация скорости

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, описанная выше, а ансамбль реализаций. Но все реализации ансамбля характеризуются всеми свойствами описанной выше реализации, т. е. на промежутках времени длиной τ поле скорости (данной реализации) не зависит от времени и описывается одной гармоникой с одной поляризацией (3.86). Только амплитуда и волновой вектор различны для разных реализаций в данном промежутке времени. Очевидно, что усреднение по ансамблю реализаций в данный момент времени эквивалентно усреднению по времени, т. е. в данном смысле процесс эргодичен.

В конце концов все усреднения следует понимать как усреднения по времени. Ведь в данном конкретном случае осуществляется лишь одна реализация, являющаяся случайной функцией только времени (а не пространства). Случайный процесс в целом является однородным по времени. Поэтому для других реализаций ансамбля целесообразно сдвинуть начало отсчета времени каждого промежутка. Иными словами, для m -й реализации промежутков времени, в течение которого поле скорости постоянно, есть $t_m + n\tau < t \leq t_m + (n+1)\tau$. Множество t_m можно считать выбранным из отрезка $0 < t_m < \tau$. Если бы такого сдвига (на величину t_m) не было, то все реализации характеризовались бы избранными моментами времени $t = n\tau$ и процесс не был бы строго однородным во времени.

Перейдем к описанию магнитных полей. Для этого воспользуемся четырехточечной функцией распределения p_4 . Ясно, что уравнение для нее имеет вид (3.33), где $T_{ij}(r) = D_\tau \delta_{ij} - T_2(\delta_{ij}r^2 - 1/2 r_i r_j)$, а поэтому уравнение для спектральной функции магнитных пульсаций $H(k, t)$ совпадает с (3.39). Вопрос заключается только в задании коэффициента T_2 .

Обратимся для этого к уравнениям для траекторий жидких частиц $d^1\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}^1)$, $d^2\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}^2)$. Нам достаточно две траектории, поскольку тензор T_{ij} определяется усредненным движением двух жидких частиц.

Воспользуемся для данной реализации и данного промежутка времени $t_m + n\tau < t \leq t_m + \tau(n+1)$ системой координат, такой, что поле \mathbf{v} имеет следующие компоненты: $\mathbf{v} = \{0, v(x_1), 0\}$. Простейшее движение (3.86), конечно, допускает такое представление. Дальнейшие рассуждения напоминают изложенное в подразд. 3. Разница заключается в том, что уравнение для траектории в данном случае просто решается. Обозначим через t_n начальный момент времени для m -й реализации: $t_n = t_m + n\tau$. Тогда решение уравнения для одной траектории есть $x_1(t) = x_1(t_n)$, $x_2(t) = x_2(t_n) + v[x_1(t_n)](t - t_n)$, $x_3(t) = x_3(t_n)$. Смещение $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_n)$ линейно по времени, квадрат смещения $[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_n)]^2$ квадратичен. Эту последнюю величину можно усреднять: $\langle [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_n)]^2 \rangle = (t - t_n)^2 P$. Здесь коэффициент $P > 0$ и имеет размерность квадрата скорости. Скорость изменения квадрата среднего смещения есть, как известно, коэффициент диффузии $D_\tau = \partial \langle [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_n)]^2 \rangle / \partial t = 2(t - t_n)P$, причем смещение берется за весь промежуток времени τ . Теперь мы имеем

окончательно $D_\tau = 2\tau P$. Для выяснения коэффициента T_2 обратимся к вопросу об изменении расстояния между двумя близкими жидкими частицами. Для нашей реализации в рассматриваемый промежуток времени решение уравнений для траекторий приводит к следующему выражению для $\mathbf{r} = {}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1(t_n), \\ r_2(t) &= r_2(t_n) + \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1)(t - t_n) r_1(t_n), \\ r_3(t) &= r_3(t_n). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Здесь мы приняли во внимание близость точек ${}^1\mathbf{x}$ и ${}^2\mathbf{x}$ и поэтому разложили эйлерову скорость в точке ${}^1\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Заметим, что x_1 не меняется вдоль траектории, и поэтому $\partial v / \partial x_1$ не зависит от времени. Следовательно, вся зависимость от времени входит в выражение для $\mathbf{r}(t)$ явным образом через множитель $(t - t_n)$. Скорость изменения \mathbf{r} определяется из (3.90), т. е. $dr_1/dt = 0$, $dr_2/dt = 0$, $dr_3/dt = r_1(t_n) \partial v(x) / \partial x$. Физический смысл коэффициента T_2 — средняя скорость относительного изменения расстояния между жидкими частицами. Более конкретно, $T_2 = a \langle [r(t_n + \tau) - r(t_n)]^2 \rangle / \tau \langle [r(t_n + \tau)]^2 \rangle$, a — безразмерная константа порядка единицы. В числителе стоит средний квадрат изменения расстояния между частицами за время τ . Деление на τ означает, что мы вычисляем скорость изменения квадрата расстояния, а $\langle r^2 \rangle$, тоже стоящее в знаменателе, соответствует тому, что определяется относительная скорость.

Целесообразно рассмотреть три случая. Первый случай — малые τ ($\tau \ll 1/vk_0$). Согласно (3.90) $[r(t_n + \tau) - r(t_n)]^2 \sim \tau^2$, в то время как $r(t_n + \tau)$ слабо отличается от $r(t_n)$. Следовательно, для малых τ получаем $T_2 = \tau P_2$. Коэффициент P_2 имеет размерность квадрата частоты и по порядку величины $P_2 \approx \langle v^2 \rangle k_0^2$. Отсюда мы приходим к инкременту (3.88) (совпадающему по порядку величины с T_2).

Второй — умеренные τ ($\tau \approx 1/vk_0$). Здесь, естественно, $[r(t_n + \tau) - r(t_n)]^2 \approx [r(t_n + \tau)]^2$, поэтому $T_2 = a/\tau \approx vk_0$. Это наиболее интересная ситуация. Генерация поля именно для такого T_2 продемонстрирована в подразд. 7. Инкремент нарастания поля $\gamma \approx vk_0$.

Третий случай — большие τ ($\tau \gg 1/vk_0$). Тогда расстояние между частицами \mathbf{r} перестает, вообще говоря, быть малым, если даже в начальный момент оно было малым (по сравнению с $2\pi/k_0$). Тем не менее (3.90) остается справедливым. Ясно, что и в этом случае можно написать $[r(t_n + \tau) - r(t_n)]^2 \approx [r(t_n + \tau)]^2$, следовательно, $T_2 = a/\tau \ll vk_0$.

Все три случая можно объединить в один с помощью интерполяционной формулы

$$T_2 = \tau k^2 \langle v^2 \rangle a / (1 + \tau^2 k^2 \langle v^2 \rangle) \approx \gamma.$$

Видно, что при больших τ , $\tau \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 0$, и динамо отсутствует. Это естественный результат: при $\tau \rightarrow \infty$ мы фактически возвращаемся к одномерному движению в течение всего времени. Но при этом динамо невозможно, и γ стремится поэтому к нулю. Инкремент максимален при $\tau \approx 1/vk_0$.

В заключение этого подраздела сформулируем задачу о генерации магнитных полей, если пользоваться непосредственно решением уравнения (1.7) на промежутке времени длиной τ . Ввиду простоты движения решение определяется без труда. Здесь уже используется вполне конкретная реализация, например такая, что $t_m = 0$, т. е. скачок скорости происходит в моменты времени $t_n = n\tau$. Распределение вероятностей скорости инвариантно относительно сдвига времени $\tau, 2\tau, \dots, n\tau$, представляя собой стационарный в статистическом смысле процесс. Магнитное поле (и скалярная примесь) представляет случайный процесс со стационарными приращениями. В момент времени $t = t_n$ магнитное поле ведет себя подобным образом по отношению к моменту t_{n+1} . Математически это означает, что можно формулировать задачу на собственные функции следующим образом:

$$f(\tau) H_{ij}(\mathbf{r}, t_n) = H_{ij}(\mathbf{r}, t_{n+1}). \quad (3.91)$$

Существенно то, что функция f не зависит от координат. Тем самым выражение (3.91) представляет собой разделение переменных (\mathbf{r} и t), характеризующее постановку задачи на собственные функции. Итак, если задано начальное значение корреляционного тензора H_{ij} при $t = t_n$, то в момент t_{n+1} оно определяется умножением на $f(\tau)$. Собственное значение определяется следующим образом: $-E_m = [f_m(\tau) - 1] \tau^{-1}$. Здесь f_m соответствует одному из собственных решений, т. е. решению, удовлетворяющему (3.91). В пределе марковского процесса $H_{ij}(t_{n+1})$ слабо отличается от $H_{ij}(t_n)$, т. е. можно записать $H_{ij}(t_{n+1}) = H_{ij}(t_n) + \tau \partial H_{ij}(t_n) / \partial t$. И сама функция $f(\tau)$ слабо отклоняется от единицы, т. е. $f(\tau) = 1 + \tau df(0) / d\tau$. Подставляя эти выражения в (3.91), имеем

$$-E = df(0) / d\tau, \quad \partial H_{ij}(t_n) / \partial t = -E H_{ij}(t_n),$$

что возвращает нас к обычной постановке задачи на собственные значения. В общем случае немарковского процесса $f(\tau)$ сильно отличается от единицы.

Заметим, что начальный момент для H_{ij} должен быть именно t_n . В этот момент поле скорости меняется скачком и ничего не помнит о своем прошлом. Магнитное поле при $t = t_n$ несет информацию лишь о предыдущих значениях скорости для $t < t_n$. Поэтому магнитное поле в момент времени $t = t_n$ нескоррелировано с будущим полем скорости. Именно такую начальную задачу можно решать. Конечный момент $t = t_{n+1}$ тоже должен быть выбран именно таким: на самом промежутке времени $t_n < t \leq t_{n+1}$

магнитное поле не обязано вести себя подобным образом, т. е. как собственная функция. Инвариантность всех функций распределений вероятностей имеется лишь относительно конечного сдвига по времени, равного τ (или кратного этому промежутку времени).

12. Другие виды нетрадиционной турбулентности

Двумерная турбулентность. В предыдущем подразделе мы обсудили один из видов турбулентности, которую можно назвать нетрадиционной. В гл. II, подразд. 3, был указан другой вид нетрадиционной турбулентности — двумерной. Более точно надо было бы назвать ее «плоской» (хотя принята терминология «двумерная турбулентность»). Двумерное движение способно генерировать магнитное поле, плоское — нет. При этом подразумевается, что коэффициент омической диффузии D не зависит от координат (в противном случае генерация возможна, см. гл. I, подразд. 7).

Введем систему координат, такую, что поле скорости лежит в плоскости XU : $\mathbf{v} = \{v_x(x, y), v_y(x, y), 0\}$. Задача о поведении магнитного поля разбивается на две:

- 1) динамика поля $\{0, 0, H_z\}$, обозначим его \mathbf{H}_{\parallel} ;
- 2) динамика поля $\{H_x, H_y, 0\}$, обозначим \mathbf{H}_{\perp} .

Поля \mathbf{H}_{\parallel} и \mathbf{H}_{\perp} не взаимодействуют между собой, если они не зависят от z , что мы и будем предполагать, и их можно рассматривать отдельно.

Двумерная турбулентность и крупномасштабные поля. Обсудим прежде всего динамику поля \mathbf{H}_{\parallel} . Уравнение для \mathbf{H}_{\parallel} совпадает с уравнением для скалярной примеси. Поэтому все предыдущие результаты, касающиеся скалярной примеси, относятся и сюда. В частности, уравнение для p_4 имеет по-прежнему вид (3.33). Только индексы в тензоре T_{ij} пробегают значения 1, 2 (а не 1, 2, 3, как в трехмерном процессе). Поведение крупномасштабной составляющей определяется интегрированием уравнения (3.33) по координатам $^2x, ^3x, ^4x$, что приводит к уравнению турбулентной диффузии с коэффициентом диффузии $T(0)$.

Неоднородность турбулентности, выражающаяся в зависимости величины $\langle v^2 \rangle$ от координат, приведет к коэффициенту диффузии, зависящему от координат. На языке уравнений электродинамики это означает, что неоднородность турбулентности приведет к неоднородной электропроводности $\sigma(\mathbf{x})$. Диамагнитный эффект здесь не возникает. В сущности это связано с тем, что для скалярной примеси можно записать граничные условия в виде сохранения потока $D'_\theta \nabla_n \theta' = D''_\theta \nabla_n \theta''$, где ∇_n означает производную в нормальном направлении по отношению к границе (D'_θ, D''_θ — значения коэффициента (турбулентной) диффузии с обеих сторон границы, производная тоже берется с одной и с другой стороны границы). Поскольку θ в данном случае просто H_z , то нетрудно видеть, что выписанное условие эквивалентно $\text{rot}_t \mathbf{H}' / \sigma' =$

$= \text{rot}_t \mathbf{H}''/\sigma''$, т. е. тангенциальная составляющая тока (или $\text{rot } \mathbf{H}$) испытывает скачок, определяемый отношением σ''/σ' . Сама же функция θ , а значит, и H_z непрерывны на границе. Следовательно, магнитная проницаемость не меняется при переходе через границу, и диамагнетизм не возникает.

Далее мы дадим физическую интерпретацию диамагнетизма. Насколько нам известно, физический смысл турбулентного диамагнетизма до сих пор не выяснен, несмотря на то что это явление известно уже давно. Двумерная турбулентность достаточно наглядна, и диамагнитный эффект в ней проявляется в полной мере. Отметим, что другие явления динамики крупномасштабного поля (гиротропная генерация (α -эффект) и топологическая накачка (см. гл. II, подразд. 9)) не могут быть описаны в рамках двумерной турбулентности. Излагаемая ниже физическая интерпретация принадлежит Л. Л. Кичатинову.

Плоскость XU , в которой происходит турбулентное движение, изображена на рис. 3.1. Напомним, что магнитное поле не зависит от координаты z . Поле \mathbf{H}_{\parallel} ортогонально плоскости рисунка, \mathbf{H}_{\perp} лежит в этой плоскости. Вернемся прежде всего к описанию \mathbf{H}_{\parallel} . Однородная турбулентность приводит к сглаживанию градиентов поля; в результате действия диффузии поле станет однородным — без градиентов. Диамагнитный эффект проявляется в однородном поле. Именно в однородном поле он проявляется в чистом виде (турбулентная диффузия уже выключена). Рассмотрим поэтому начальное однородное поле. Пусть интенсивность турбулентности зависит от координат. Допустим для определенности, что величина $\langle v^2 \rangle$ не меняется на линиях $x = \text{const}$ и падает в направлении оси x . Иначе говоря, $\nabla \langle v^2 \rangle = \{0, \partial \langle v^2 \rangle / \partial x\}$, $\partial \langle v^2 \rangle / \partial x < 0$. Силовые линии поля \mathbf{H}_{\parallel} проектируются на рис. 3.1 в виде точек, однородно распределенных в плоскости XU (и не изображенных на рисунке). Несжимаемое движение только перемешивает точки — концы силовых линий. Поскольку они распределены однородно, перемешивание ни к чему не приведет: они так и останутся однородно распределенными. Единственно, что при малых x перемешивание будет более эффективным, чем при больших. Но главное — однородное поле так и останется однородным.

Обратимся к полю \mathbf{H}_{\perp} , для которого диамагнетизм имеет место. На рис. 3.1 изображены силовые линии начального невозмущенного поля (две сплошные линии, параллельные оси y). Штрихом изображены силовые линии, возмущенные движениями проводящей плазмы. Левая силовая линия возмущена больше правой: интенсивность турбулентности слева больше, чем справа. Из рисунка видно, что силовые линии в целом сблизилась — произошло усиление поля. Кроме того, что не менее важно, вся силовая трубка, образованная этими двумя силовыми линиями, сдвинулась вправо. Если раньше центр трубки лежал в точке $(x_0 + x_1)/2$, то теперь он сдвинулся ближе к точке x_1 . Заметим, что, несмотря на сближение силовых линий, скалярная примесь (а

значит, и поле \mathbf{H}_{\parallel}) не возросла в месте сближения. Дело в том, что поле скорости несжимаемо и кроме движения в направлении оси x должно одновременно происходить растекание вдоль силовых линий (изображено стрелками на рис. 3.1).

Рассмотрим теперь обратное движение проводящей среды — движение влево (рис. 3.2). В этом случае силовые линии удаляются друг от друга. Вся силовая трубка сдвигается влево. Причем центр силовой трубки сдвинулся на такое же расстояние влево, на сколько на рис. 3.1 он сдвинулся вправо. Только сдвиг влево

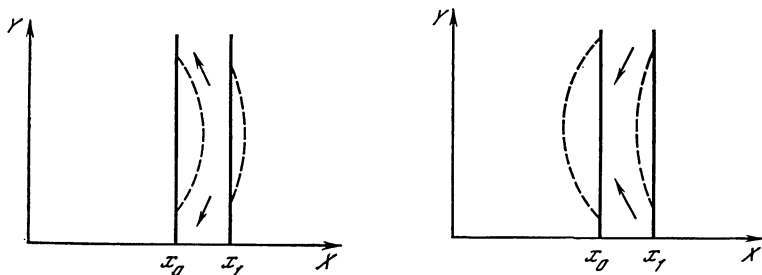


Рис. 3.1.
Возмущение поля при движении плазмы вправо

Рис. 3.2.
Возмущение поля при движении плазмы влево

(см. рис. 3.2) сопровождается уменьшением напряженности поля (силовая трубка расширяется). Заметим, что уменьшения плотности скалярной примеси по рис. 3.2 не произойдет, поскольку в несжимаемой жидкости должно произойти компенсирующее движение, изображенное стрелками.

В целом из рис. 3.1 и 3.2 следует, что сдвиг вправо имеет больший вес. Поскольку сдвиг вправо сопровождается усилением поля, а влево — ослаблением, можно сказать, что в результате двух процессов, изображенных на этих рисунках, среднее поле передвинется вправо. Иначе говоря, имеется поток поля (первоначально однородного!) вправо.

В математической форме это утверждение эквивалентно следующему виду уравнения для среднего магнитного поля \mathbf{V}_{\perp} : $\mathbf{V}_D = -\nabla D_T$, $\partial \mathbf{V}_{\perp} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{V}_D \mathbf{V}_{\perp}] + D_T \Delta \mathbf{V}_{\perp}$ (ср. (2.90)), как раз и означающему, что имеется поток среднего поля вправо (в направлении убывания $\langle v^2 \rangle$) поскольку $D_T = \frac{1}{3} v l$. Естественно, это же уравнение можно записать в виде $\partial \mathbf{V}_{\perp} / \partial t = -\text{rot rot } D_T \mathbf{V}_{\perp}$, откуда и следует, что в двумерном случае неоднородность скорости приводит к неоднородной магнитной проницаемости, $\mu = 1/R'_m$ (R'_m зависит от координат через среднеквадратичную скорость). В то же время электропроводность в данном случае остается газокинетической и не перенормируется на турбулентную. Итак, для поля $\langle \mathbf{H}_{\parallel} \rangle = \mathbf{V}_{\parallel}$ электропроводность турбулентная ($\sigma_T = \sigma/R'_m$) и зависит от координат, а магнитная

проницаемость не перенормируется, $\mu = 1$. Для поля \mathbf{V}_\perp , наоборот, $\sigma = \text{const}$, $\mu = 1/R'_m$. Неудивительно поэтому, что в трехмерном случае эти две перенормировки присутствуют одновременно, причем каждая из величин перенормируется «наполовину»: $\sigma_T = \sigma/(R'_m)^{1/2}$, $\mu = 1/(R'_m)^{1/2}$.

Перейдем к обсуждению роли неоднородной плотности. Пусть для простоты интенсивность турбулентности не зависит от координат: $\langle v^2 \rangle = \text{const}$, этот случай иллюстрирует роль неоднородной плотности в чистом виде. Полагаем, что плотность постоянна при $x = \text{const}$ и убывает с ростом x (см. рис. 3.1, 3.2). Ясно, что флюктуация скорости, направленная вправо (см. рис. 3.1), сопровождается растеканием жидкости (изображено стрелками и происходило выше по другой причине). Движение влево (см. рис. 3.2) сопровождается стеканием жидкости (тоже изображено стрелками). Дело в том, что часть жидкости, находящаяся первоначально при $x = x_0$, переходя вправо, обладает плотностью большей, чем в окружающей области, $x > x_0$. Для сохранения средней плотности при данном x необходимо, чтобы в рассматриваемой части жидкости плотность уменьшилась, что и приводит к растеканию жидкости, т. е. $\text{div } \mathbf{v} > 0$. При движении влево часть жидкости, наоборот, привносит более разреженную по сравнению с окружающей средой плотность. Для сохранения средней плотности при $x < x_0$ в этой точке должно выполняться условие $\text{div } \mathbf{v} < 0$.

К каким следствиям это приведет для крупномасштабных полей \mathbf{V}_\parallel и \mathbf{V}_\perp ? Обратимся сначала к полю \mathbf{V}_\parallel . Сказано, что это поле ведет себя как скалярная примесь. При растекании жидкости, т. е. $\text{div } \mathbf{v} > 0$, плотность скалярной примеси, естественно, уменьшается, при $\text{div } \mathbf{v} < 0$, наоборот, увеличивается. Следовательно, движение вправо (см. рис. 3.1) сопровождается уменьшением \mathbf{H}_\parallel , в то время как движение влево (см. рис. 3.2) сопровождается увеличением \mathbf{H}_\parallel . На этот раз движение влево обладает большим весом по сравнению с движением вправо. Следовательно, среднее поле смещается влево. Скорость смещения среднего поля есть $\mathbf{V}_D = D_T \nabla \rho / \rho$. Это и есть накачка поля из-за неоднородной плотности, о которой упоминалось в гл. II, подразд. 9.

Что касается поля \mathbf{V}_\perp , то для него накачка происходит в противоположном направлении. Действительно, согласно рис. 3.1 растекание жидкости приводит к сжатию силовой трубки. Выше сжатие трубки происходило из-за того, что левая «стенка» трубки движется быстрее правой. На этот раз сжатие трубки связано с растеканием жидкости вдоль силовых линий, непременно приводящим к сжатию трубки, а значит, к усилению поля \mathbf{H}_\perp . Движение влево согласно рис. 3.2 приводит, наоборот, к утолщению трубки и ослаблению поля. В результате движение вправо обладает большим весом по сравнению с движением влево. Среднее поле \mathbf{V}_\perp смещается вправо со скоростью $\mathbf{V}_D = -D_T \nabla \rho / \rho$.

Поскольку поля \mathbf{H}_\perp и \mathbf{H}_\parallel (не зависящие от z) не взаимодействуют, то двумерная турбулентность с неоднородной плотностью

будет приводить одновременно к накачке поля \mathbf{V}_\perp вправо, а поля \mathbf{V}_\parallel — влево, если даже они присутствуют одновременно. В трехмерной турбулентности эти два эффекта конкурируют. Действительно, пусть нас интересует магнитное поле $\{0, 0, B_z\}$. Движения в плоскости XU , как сказано, стремятся перенести поле влево, т. е. параллельно $\nabla\rho$, в то время как движения в плоскости XZ стремятся перенести поле антипараллельно вектору $\nabla\rho$ (поскольку само поле лежит в этой плоскости), т. е. вправо. В изотропной турбулентности по этой причине перенос поля из-за градиента плотности вообще отсутствует. Перенос появляется (в ту или другую сторону) при наличии анизотропии турбулентности.

В заключение этого раздела отметим, что до сих пор в книге шла речь о кинематическом подходе. Это означает, что обратная реакция магнитного поля на движение была пренебрежимо малой. Относительно поля \mathbf{H}_\parallel в двумерной турбулентности это требование не является обязательным. Более того, как говорилось в гл. II, подразд. 3, именно поле \mathbf{H}_\parallel , если оно достаточно сильное, само вызывает явление двумерной турбулентности. В данном разделе поле \mathbf{H}_\parallel зависит от координат x, y . Останется ли турбулентность двумерной, если такое неоднородное поле \mathbf{H}_\parallel наложено на проводящую среду, причем напряженность поля велика? Оказывается, да. Дело в том, что электромагнитная сила, действующая на жидкость, сводится в этом случае к магнитному давлению $[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]/4\pi = -\nabla H^2/8\pi$, которое просто добавляется к газокинетическому. Можно сказать, что полное давление при этом есть $H^2/8\pi + p$, p — газокинетическое давление. Все же свойства двумерного движения при этом сохраняются.

Двумерная турбулентность и мелкомасштабные поля. Плоское движение не вызывает генерации поля. Поэтому мелкомасштабные поля без внешнего источника в конце концов затухают. Поле \mathbf{H}_\parallel ведет себя как скалярная примесь и, конечно, не генерируется, \mathbf{H}_\perp — как градиент скалярной примеси (напомним, что мы рассматриваем магнитные поля, не зависящие от z). Усиление $\langle H_\perp^2 \rangle$ только временное. За время l/v эта величина возрастет, масштаб поля уменьшится, замороженность исчезнет и поле начнет диссипировать. Как убедиться в справедливости этих утверждений, которые следуют непосредственно из рассмотрения (1.7), пользуясь развитой выше теорией мелкомасштабных полей? На первый взгляд кажется, что переход к двумерному случаю тривиален. Уравнение для корреляционного тензора H_{ij} записывается в виде (3.65), только тензор T_{ij} обладает лишь четырьмя ненулевыми компонентами: $T_{ij} \neq 0$, если $i, j = 1, 2$, и $T_{i3} = T_{3j} = 0$. В действительности же аккуратный и последовательный переход к двумерному случаю в сущности приводит к разрушению всей теории трехмерного динамо. Во всяком случае, выводы теории двумерной турбулентности оказываются прямо противоположными трехмерной.

Прежде всего обсудим возможность использования вариационного принципа. Как указано в подразд. 6, его использование справедливо в изотропном случае. Двумерная турбулентность не является изотропной в трехмерном пространстве. Обобщение на анизотропный случай можно в принципе осуществить, если действие оператора rot^2 , введенного в подразд. 6, на корреляционный тензор вектор-потенциала (в результате чего получается корреляционный тензор магнитного поля) может быть заменено действием какого-нибудь знакоопределенного оператора — типа оператора Лапласа. В рассматриваемом случае оператор rot^2 не может быть эквивалентен знакоопределенному оператору. Дело в том, что знакоопределенный оператор — будем для определенности говорить о положительно определенном операторе — приводит к умножению собственной функции этого оператора (в данном случае — собственного тензора) на положительное число. Здесь так заведом не получится. В самом деле, действие оператора rot^2 на $\langle \mathbf{A}_{\parallel} \mathbf{A}_{\parallel} \rangle$ приводит к $\langle H_{\perp i} H_{\perp j} \rangle$. И наоборот, действие rot^2 на $\langle A_{\perp i} A_{\perp j} \rangle$ — к $\langle \mathbf{H}_{\parallel} \mathbf{H}_{\parallel} \rangle$. Умножение на положительное число при действии оператора rot^2 означало бы, что каждый элемент тензора умножается на одно и то же число. В данном же случае некоторые компоненты тензора $\langle A_i A_j \rangle$ исчезают (элементы $\langle \mathbf{H}_{\parallel} \mathbf{H}_{\parallel} \rangle$, например, при действии rot^2 на $\langle \mathbf{A}_{\parallel} \mathbf{A}_{\parallel} \rangle$), а некоторые появляются (в нашем примере $\langle H_{\perp i} H_{\perp j} \rangle$). Оператор rot^2 сводится к умножению на данное число и повороту. Для перехода вектора из плоскости XU в вектор, параллельный оси z , требуется поворот. Оператор же поворота не является знакоопределенным. Например, поворот вектора может осуществляться с помощью матрицы

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{vmatrix}$$

— матричное представление оператора поворота двумерного вектора. Собственные значения λ_m матрицы суть $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Следовательно, матрица содержит отрицательное собственное значение -1 и не может быть положительно-определенной. Она также не может быть отрицательно-определенной.

Итак, общее уравнение (3.65) не приводится к самосопряженному виду, и вариационный принцип не может быть использован. Если теперь рассмотреть магнитные поля, не зависящие от z , то, как сказано, поля \mathbf{H}_{\parallel} и \mathbf{H}_{\perp} не взаимодействуют друг с другом. Тогда можно рассматривать отдельно уравнения для $\langle \mathbf{H}_{\parallel} \mathbf{H}_{\parallel} \rangle$ и тензора $\langle H_{\perp i} H_{\perp j} \rangle$. Уравнение для корреляционной функции поля \mathbf{H}_{\parallel} совпадает с уравнением для корреляционной функции скалярной примеси и, конечно, эрмитово. Что касается корреляционного тензора продольного поля, то он может быть записан в виде $\langle H_{\perp i}({}^1\mathbf{x}) H_{\perp j}({}^2\mathbf{x}) \rangle = (\Delta \delta_{ij} - \partial_i \partial_j) A({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x})$, $i, j = 1, 2$, A — корреляционная функция вектор-потенциала $\{0, 0, A_z\}$. Уравнение для A тоже совпадает с уравнением для скалярной примеси и опять-таки является самосопряженным. Вариационный принцип

для этих двух случаев может быть записан. Ясно, что он сводится к положительно-определенному функционалу, откуда и следует, что все собственные значения E_m положительны. Нижнее собственное значение E_0 по порядку величины есть v/l — это обратное время существования поля. Естественно, отрицательные собственные значения не могут возникать: скалярная примесь не генерируется. Временное усиление поля $\langle H_{\perp}^2 \rangle$ не противоречит утверждению о том, что все собственные значения положительные. Дело здесь обстоит точно так же, как со среднеквадратичным градиентом скалярной примеси. Последний, как известно, тоже первоначально усиливается, а затем затухает.

Итак, флюктуации магнитного поля быстро затухают при наличии двумерной турбулентности. Если имеется внешний источник полей, то устанавливается стационарный спектр флюктуаций. Внешним источником может служить крупномасштабное магнитное поле. Мы рассмотрим два случая. Пусть в первом случае $\mathbf{B}_{\parallel} \neq 0$, а $\mathbf{B}_{\perp} = 0$. Иначе говоря, имеется источник только продольного поля. В этом случае спектр установившихся флюктуаций совпадает со спектром скалярной примеси. Согласно [42], имеем $E_H^{(\parallel)}(k) \sim k^{-1/3}$ при $kl_{\omega} \ll 1$ (см. определение l_{ω} в гл. II, подразд. 3) и $E_H^{(\parallel)}(k) \sim k^{-1}$ при $kl_{\omega} \gg 1$. Энергия магнитных пульсаций продольного поля сосредоточена при малых $k \approx 2\pi/l$. Поэтому энергия пульсаций связана с энергией крупномасштабного поля следующим образом:

$$\langle H_{\parallel}^2 \rangle = B_{\parallel}^2 \frac{D_T}{L^2} \frac{l}{v} \approx B_{\parallel}^2 \frac{l^2}{L^2}, \quad (3.92)$$

L — масштаб поля B . Отсюда видно, что энергия пульсаций много меньше (в $L^2 l^{-2}$ раз) энергии крупномасштабного поля. Связь между B_{\parallel}^2 и флюктуациями $\langle H_{\parallel}^2 \rangle$ (3.92) получена просто из баланса диссипации крупномасштабного поля за время L^2/D_T и ухода энергии из области $k \approx 2\pi/l$ в область больших волновых чисел. Диссипация крупномасштабного поля есть источник магнитных пульсаций, и деформация со скоростью v/l — сток. Заметим, что строго однородное поле не генерирует пульсации: из (3.92) следует, что при $L \rightarrow \infty$ имеем $\langle H_{\parallel}^2 \rangle \rightarrow 0$. Это, впрочем, очевидно: строго однородное поле \mathbf{B}_{\parallel} — это точное решение уравнения (1.7) (так же как в поле однородной примеси не генерируются флюктуации примеси).

Перейдем ко второму случаю: $\mathbf{B}_{\perp} \neq 0$, $\mathbf{B}_{\parallel} = 0$, имеется источник флюктуаций поперечного поля. Спектр флюктуаций совпадает в данном случае со спектром градиента скалярной примеси (отличающимся множителем k^2 от спектра самой примеси). Итак, $E_H^{(\perp)} \sim k^{1/3}$ при $kl_{\omega} \ll 1$ и $E_H^{(\perp)} \sim k$ при $kl_{\omega} \gg 1$. Энергию пульсаций при $k \approx 2\pi/l$ можно получить непосредственно из (3.92), вспоминая, что величина $\langle H_{\parallel}^2 \rangle$ эквивалентна $\langle \theta^2 \rangle$, а $\langle H_{\perp}^2 \rangle$ соответствует $\langle (\nabla\theta)^2 \rangle$ в области $k \approx 2\pi/l$. Это связано с тем, что $\langle \theta^2 \rangle$ сосредоточена именно при этих k . Итак, (3.92) следует разделить на l^2 и

перейти к

$$\langle H_{\perp}^2 \rangle |_{k=2\pi/l} = B_{\perp}^2. \quad (3.93)$$

Энергия пульсаций растет вместе с ростом k , поэтому та энергия, которая сосредоточена при $k \approx 2\pi/l$, пренебрежимо мала по сравнению с полной энергией пульсаций. Полная энергия последних сосредоточена при очень больших волновых числах, обрезающих спектр магнитных пульсаций. Они определяются коэффициентом омической диффузии D .

Вернемся к уравнению для корреляционного тензора магнитного поля (3.65). В подразд. 7 мы упоминали о втором способе, чтобы убедиться в наличии динамо-решения (кроме вариационного принципа): с помощью анализа асимптотического поведения собственного решения уравнения для спектральной функции при больших волновых числах. Попробуем проанализировать таким же образом двумерный случай. Рассмотрим сначала спектральную функцию продольного поля H_{\parallel} . Уравнение для корреляционной функции совпадает с (2.62), только тензор T_{ij} уже другой. нас интересуют близкие точки (что соответствует большим волновым числам), поэтому этот тензор можно выписать в виде $T_{ij} = T(0) \delta_{ij} - T_2 (r^2 \delta_{ij} - 2/3 r_i r_j)$, $i, j = 1, 2$. Тензор составлен таким образом, чтобы $\partial_i T_{ij} = 0$. Уравнение для спектра поля H_{\parallel} имеет вид

$$\begin{aligned} \partial H^{(\parallel)}(k, t) / \partial t &= T_2 (k^2 \partial^2 H^{(\parallel)} / \partial k^2 + 3k \partial H^{(\parallel)} / \partial k), \\ E_H^{(\parallel)*}(k) &= 2\pi k H^{(\parallel)}(k). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Непосредственно убеждаемся в самосопряженности оператора правой части (3.94) в двумерном пространстве k (для чего необходимо умножить (3.94) на $2\pi k \tilde{H}$ и проинтегрировать по k от 0 до ∞ , уравнение для \tilde{H} совпадает при этом с (3.94)). Очевидно, из (3.94) следует сохранение величины $\langle H_{\parallel}^2 \rangle$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно умножить (3.94) на $2\pi k$ и проинтегрировать по k от 0 до ∞ . Слева получим $d \langle H_{\parallel}^2 \rangle / dt$, справа — нуль. Отсюда уже следует невозможность генерации поля H_{\parallel} . Мы все-таки исследуем поведение собственной функции уравнения (3.94) в рассматриваемой области больших волновых чисел. Заменяя в левой части $\partial/\partial t$ на $-E$, получаем $H_m^{(\parallel)}(k) = a_1 k^{\alpha_1} + a_2 k^{\alpha_2}$, $\alpha_{1,2} = -1 \pm (1 - E/T_2)^{1/2}$. Нижняя собственная функция есть спектральная функция, и она должна быть неотрицательной. При этом E_0 может быть положительным. Напомним, что в трехмерном случае для неотрицательности собственной функции величина E_0 должна быть отрицательной (см. подразд. 7). Здесь нельзя сделать вывода о необходимости отрицательного E_0 .

Перейдем к уравнению для спектральной функции поперечного поля H_{\perp} . Оно может быть получено непосредственно из (3.65) с двумерным тензором T_{ij} . Проще, однако, его получить прямо из (3.94), заменяя $H^{(\parallel)}$ на $H^{(\perp)} k^{-2}$, поскольку поле H_{\parallel} описывается скалярной примесью, а H_{\perp} — градиентом скалярной примеси.

Получим следующее уравнение для $H^{(\perp)}(k, t)$:

$$\partial H^{(\perp)}(k, t)/\partial t = T_2(k^2 \partial^2 H^{(\perp)}/\partial k^2 - k \partial H^{(\perp)}/\partial k), \quad (3.95)$$

$E_N^{(\perp)}(k) = 2\pi k H^{(\perp)}(k)$. Для собственного решения уравнения (3.95) имеем $H_m^{(\perp)} = a_1 k^{\alpha_1} + a_2 k^{\alpha_2}$, $\alpha_{1,2} = 1 \pm (1 - E/T_2)^{1/2}$. Здесь опять вывод о необходимости отрицательного E_0 не может быть сделан.

Отметим, что (3.95) уже не является самосопряженным уравнением в пространстве \mathbf{k} . Отмечалось, что именно так и должно быть. Тем не менее представляет интерес непосредственно повторить выводы подразд. 6 и посмотреть, в каком месте происходит отличие двумерного случая от трехмерного. Выше мы апеллировали к тому, что двумерная турбулентность не является изотропной в трехмерном пространстве, и поэтому самосопряженность не получалась. Как обстоит дело в двумерном мире, где третьей координаты просто нет? Поле скорости уже может быть изотропным в двумерном пространстве, магнитное поле \mathbf{H}_\perp — тоже. Уравнение для магнитного поля имеет вид

$$\partial H_i/\partial t = H_j \partial_j v_i - v_j \partial_j H_i, \quad (3.96)$$

а сопряженное уравнение (с заменой \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$)

$$\partial \tilde{H}_i/\partial t = v_j \partial_j \tilde{H}_j - v_j \partial_j \tilde{H}_i. \quad (3.97)$$

Если бы пространство было трехмерным, то перейти от (3.97) к (3.96) было бы очень просто: достаточно взять ротор от (3.97) и обозначить $\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$. Именно на этом основании мы сводили уравнение для тензора H_{ij} к самосопряженному. В двумерном пространстве операции ротор не существует! Здесь можно перейти к уравнению (3.96), если обозначить $H_1 = \partial_2 A$, $H_2 = -\partial_1 A$, и тогда уравнение для A следует писать в виде $\partial A/\partial t = -v_j \partial_j A$ (это было бы уравнением для z -компоненты вектор-потенциала поля \mathbf{H}_\perp , но координата z отсутствует в двумерном пространстве!). Это уравнение вовсе не совпадает с (3.97). Итак, в двумерном пространстве уравнение для магнитного поля не получается из сопряженного и вывод о самосопряженности уравнения для H_{ij} (или о том, что оно сводится к самосопряженному виду) не может быть сделан.

Видоизменен несколько наш анализ поведения $H(k, t)$ при больших k . Сопоставим собственные решения двумерной задачи (3.95) и трехмерной (3.39), меняющие знаки. Очевидно, речь при этом не идет о нижней собственной функции. Для того чтобы собственная функция $H_m^{(\perp)}$ (а также $H_m^{(\parallel)}$) меняла знак, необходимо, чтобы выражение $\sqrt{1 - E_m/T_2}$ стало комплексным. Собственное значение E_m не может быть отрицательным (и действительным): в противном случае $H_m^{(\perp)}$ неотрицательно. Что касается собственного решения трехмерной задачи (3.39), то оно содержит отрицательные собственные значения, находящиеся в пределах $-15/4 T_2 <$

$< E_m < 0$ и приводящие к знакопеременному решению. Можно поэтому ожидать, что в потенциальной яме (трехмерного случая) содержится не один уровень. Нижний уровень не должен содержать узлов, т. е. менять знак, в то же время более высокие уровни меняют знак, но если они описывают захваченное состояние, то $E_m < 0$.

Проведем еще одно сопоставление двумерного и трехмерного случаев. Рассмотрим положительную часть знакопеременного собственного решения задач (3.39) и (3.95). Иначе говоря, рассмотрим функцию $H'_m = H_m(k)$, если $H_m(k) \geq 0$, и $H'_m = 0$, если $H_m(k) < 0$. Такая функция похожа на нижнюю собственную функцию, поскольку она не меняет знак. Она удовлетворяет нашим уравнениям (в одном случае (3.39), в другом — (3.95)) во всех точках, кроме тех, где $H_m(k)$ обращается в нуль. Строго говоря, такая функция не является решением этих уравнений: в точках обращения $H_m(k)$ в нуль будет иметь место фиктивная генерация и диссипация поля. Эти точки являются как бы источниками и стоками поля. Это видно из того, что такое решение не приводит к уменьшению масштаба поля, причем энергия поля сосредоточена в области, где вмороженность существенна (между точками, где $H_m(k) = 0$). В частности, соотношения (3.40), (3.41), показывающие рост эффективного волнового вектора k' , для данных функций не будут иметь места. Тем не менее эти функции «чувствуют» различие между двумерным и трехмерным пространствами. В трехмерном случае существует решение в виде такой функции с $E_m < 0$ (но $E_m >^{15/4} T_2$), т. е. растущее решение, в то время как в двумерном случае решение в виде такой функции экспоненциально убывает, $E_m > 0$.

В заключение этого раздела отметим, что до сих пор мы в сущности пользовались формальным доказательством различия двумерного и трехмерного пространств. Можно ли понять его с помощью более наглядных соображений? Почему в трехмерном случае в двух конкурирующих процессах, упомянутых в подразд. 1, — росте поля и дроблении масштабов — выигрывает первый процесс, в то время как в двумерном пространстве второй процесс более эффективный? Оказывается, наглядную интерпретацию можно дать, и она будет изложена в следующем подразделе.

Переमेжаемость в турбулентности. Это еще одно новое явление, кратко описанное в гл. II, подразд. 3. Мы рассмотрим здесь вопрос о генерации магнитных полей при наличии турбулентности с перемежаемостью. Генерация крупномасштабного поля в сущности ничем здесь не примечательна. Дело в том, что динамика крупномасштабного поля определяется коэффициентами турбулентной диффузии D_T и генерации α , которые интегральным образом зависят от спектра турбулентности. Поэтому они определяются в основном энергосодержащей областью, т. е. пульсациями масштаба l , а от тонкой структуры спектра они зависят слабо.

Более содержателен вопрос о роли перемежаемости для мелко-масштабных полей. Прежде всего само явление генерации мелко-

масштабных полей можно сформулировать как рост перемежаемости флюктуаций в турбулентности, где перемежаемости не было. Действительно, в подразд. 7 показано, что в поле скорости масштаб l генерируется супермелкомасштабное поле в виде магнитных флюктуаций, масштаб его $l_H \ll l$. В подразд. 9 мы видели, что в колмогоровской турбулентности без перемежаемости тоже генерируются флюктуации поля с $l_H \ll l$: инкремент нарастания поля с масштабом $l_H \ll l$ гораздо больше, чем инкремент нарастания поля с $l_H \approx l$. В нелинейном режиме, когда флюктуации магнитного поля начнут влиять на движение, это приведет к интенсификации именно супермелкомасштабных движений, т. е. движений с масштабами много меньшими l . В результате все поля, и магнитные и гидродинамические, будут значительно быстрее меняться в пространстве по сравнению с тем, как они менялись в начальный момент. Это явление можно интерпретировать как рост перемежаемости.

Перейдем к вопросу о генерации мелкомасштабных полей при наличии перемежаемости только в поле скорости. Уравнение для четырехточечной функции распределения p_4 сохраняет свой вид (3.33) в этом случае. Меняется только корреляционный тензор T_{ij} . Здесь предоставляются две возможности. Первая — это очень большие магнитные числа Рейнольдса ($R'_m \gg R$). При этом, несмотря на то что спектр турбулентности не колмогоровский, флюктуации скорости обрезаются при $k = k_1$ и при $k \gg k_1$ имеется область, где замороженность существенна, а флюктуаций скорости уже нет. Эта область определена неравенствами (3.55). Это возвращает нас к результатам подразд. 5—7, где показано, что если такая область существует, то мелкомасштабные поля генерируются.

Вторая возможность — умеренные магнитные числа Рейнольдса ($R'_m \leq R$). Обратимся к этому случаю, используя результаты подразд. 8, 9. Из (3.33) для p_4 следует уравнение для корреляционного тензора H_{ij} в виде (3.65) или в фурье-представлении (3.70) с новой (неколмогоровской) функцией $u(p)$. Согласно гл. II, подразд. 3 спектр турбулентности в инерционной области имеет степенной характер, поэтому поперечная корреляционная функция по-прежнему представляется в виде (3.76). Только теперь $\alpha \neq 4/3$, как это было в колмогоровской турбулентности. Уравнение для поперечной корреляционной функции магнитного поля тоже сохраняет свой вид (3.77), поскольку α записано в нем не в численном, а в буквенном виде. Все остальные рассуждения (самосопряженность оператора (3.77), вариационный принцип (3.79)) формулируются тоже для произвольного α . И сама пробная функция (3.80) выписана без спецификации величины α . Числитель функционала (3.79) дает при данной пробной функции (3.80) результат

$$-^{3/2} (r_0/2)^3 (\alpha^2 + 2\alpha - 4). \quad (3.98)$$

Знаменатель положителен, так что для отрицательности функционала (3.79) требуется отрицательность числителя. При $\alpha = 4/3$

(колмогоровский спектр) числитель действительно получался отрицательным. Какова величина α для турбулентности с перемежаемостью? Согласно (2.15) при $D = 2,5$ (2,5-мерное пространство) спектр турбулентности более крутой по сравнению с колмогоровским. Тогда вместо (3.9) получим

$$2\pi u(k) k^2 = E(k) \tau(k), \quad E(k) \sim k^{-5/3 - (3-D)/3},$$

$$\tau(k) \sim k^{-2/3 - (3-D)/3}, \quad k^2 u(k) \sim k^{-7/3 - 2/3(3-D)}.$$

Выражение (3.10) в инерционной области заменяется на

$$T_{ii} = T_{ii}(0) - T'_{\alpha} r^{4/3 + 2/3(3-D)}.$$

Итак, мы видим, что величина α стала больше, чем $4/3$, при учете перемежаемости. При $D = 2,5$ имеем $\alpha = 5/3$. Ясно, что при таком α числитель функционала (3.98) отрицателен (и принимает большее отрицательное значение, чем при $\alpha = 4/3$). Следовательно, пробная функция (3.80) придает функционалу (3.79) отрицательное значение и турбулентность с перемежаемостью генерирует мелкомасштабное магнитное поле.

Другой способ убедиться в том, что генерация имеет место, изложен в подразд. 9. Если бы нижнее собственное значение соответствовало затуханию поля ($E_0 > 0$), то по порядку величины E_0 оценивалась бы как v/l . При этом левая часть (3.77) пренебрежимо мала, и общее решение уравнения можно представить в виде $H_{LL} = ak^{\beta_1} + bk^{\beta_2}$. Нижняя собственная функция не должна менять знак, следовательно, β_1 и β_2 должны быть действительны. Но поскольку $\beta_{1,2} = 1/2 \{-(3 + \alpha) \pm [(3 + \alpha)^2 - 4\alpha(3 + \alpha)]^{1/2}\}$, действительность $\beta_{1,2}$ будет обеспечена, если подкоренное выражение положительно ($-3(\alpha^2 + 2\alpha - 3) > 0$). Однако при $\alpha = 4/3$ и тем более при $\alpha > 4/3$ (при наличии перемежаемости) оно отрицательно. Следовательно, E_0 не может быть положительной. Если же $E_0 < 0$, то, как указано в подразд. 9, модуль E_0 должен быть большим ($|E_0| \gg v/l$, и левая часть (3.77) уже не мала). В этом случае собственное решение не имеет степенного вида.

В ы в о д ы. Перемежаемость только усиливает результат о генерации мелкомасштабного поля. Это связано с укрупнением спектра пульсаций поля скорости. Если бы спектр реальной турбулентности был настолько крут, что второй момент $\int p^2 u(p) dp$ сходил бы (т. е. вклад в этот интеграл давала бы в основном энергосодержащая область, а не область диссипации, как это есть на самом деле), то вся задача о генерации поля сводилась бы к вопросу о динамике супермелкомасштабных полей (см. подразд. 5—9) и уравнение для спектральной функции совпадало бы с (3.39), где T_2 как раз и выражается через этот второй момент. Вся трудность перехода от супермелкомасштабных полей просто к мелкомасштабным связана именно с расходимостью этого интеграла (т. е. с необходимостью обрезания подынтегрального выражения с помощью вязкого затухания). Чем круче спектр

турбулентности, тем меньшую роль играют большие волновые числа и тем ситуация ближе к простому виду (3.39). При наличии перемежаемости выписанный второй момент все еще расходится, но из-за более крутого спектра генерация поля осуществляется эффективнее.

13. Общие физические соображения, связанные с генерацией мелкомасштабных полей

Настоящий подраздел должен служить ключом к наглядной интерпретации и пониманию всего того, что было изложено в этой главе. Здесь мы соберем все соображения, приведшие к выводу о генерации мелкомасштабного поля. Поэтому ряд соображений будет отчасти повторять то, что уже изложено, только в компактном виде и почти без формул. Вместе с тем ряд вопросов будет освещен по-новому, что, на наш взгляд, должно способствовать углублению понимания физического смысла. Часть же материала подраздела несколько не перекрывается с изложенным выше.

Как получены основные уравнения. По существу все результаты данной главы получены с использованием уравнения для функции распределения p_4 (3.33). Да и генерация крупномасштабного поля, изложенная в гл. II, тоже следует из этого уравнения. (надо только проинтегрировать его по двум точкам и перейти к двухточечной функции распределения p_2). Дальнейший вывод уравнения для корреляционного тензора магнитного поля и для среднего поля — дело техники. Что лежит в основе вывода уравнения (3.33)?

Вспомним прежде всего, что уравнение для p_4 совпадает с уравнением для корреляционной функции (четвертого порядка) скалярной примеси. Последняя ведет себя локальным образом. Это означает, что зависимость плотности θ примеси в данной точке x в данный момент времени t от плотности в бесконечно близкий более ранний момент времени $t - \Delta$ ($\Delta > 0$ и очень мал) выражается через само значение $\theta(x)$ и через производные $\partial\theta/\partial x_i$, $\partial^2\theta/\partial x_i\partial x_j$ и т. д. Это в свою очередь означает, что $\partial p_4/\partial t$ должно выражаться через p_4 , $\partial p_4/\partial x_i$, $\partial^2 p_4/\partial x_i\partial x_j$ и т. д. Оператор не должен быть интегральным, он дифференциальный. Последнее обстоятельство связано в первую очередь с тем, что в самом уравнении для θ (2.2) именно таким образом построено выражение для $\partial\theta/\partial t$. Ясно, что если θ по меньшей мере дважды дифференцируемая функция, то, зная θ и ее первые две производные в точке x и в момент времени $t - \Delta$, можно определить (с точностью $O(\Delta^2)$) значение θ в момент времени t . Таким же свойством должна обладать функция p_4 . Представим разрыв в плотности θ . Эволюция θ сводится к переносу этого разрыва. Ясно, что, зная значение θ и производные вблизи разрыва в момент $t - \Delta$, мы не сможем определить θ в момент t . В этом случае следует иметь информацию о далеких точках, т. е. локальность нарушается. При этом уравне-

ние для усредненных характеристик было бы интегральным. Разрыв в плотности как раз и означает недифференцируемость поля θ .

Поскольку скалярная примесь следит за движением жидкости, можно сказать, что требование дифференцируемости θ есть условие на поле скорости. Последнее должно быть дифференцируемым. Мы видим, что уравнение (3.33) содержит производные не выше второго порядка. Это, по-видимому, соответствует требованию, чтобы поле скорости было дифференцируемо не менее чем дважды. Надо сказать, что физически это весьма мягкое требование. Ясно, что вязкость сглаживает разрывы в поле скорости. Сама вязкость входит через оператор Лапласа, т. е. через вторые производные. Заметим, что в последнее время изучаются недифференцируемые поля скорости (см., например, [74]) в связи с проблемой перемежаемости. По этому поводу можно сказать, что в этих работах рассматривается идеализованная ситуация с нулевой вязкостью. Это помогает определить размерность пространства D (см. гл. II, подразд. 3) в турбулентной жидкости. Отсюда не следует, конечно, что поле скорости — недифференцируемая функция.

Итак, выражение для $\partial p_4/\partial t$ можно представить через конечное число пространственных производных от p_4 . Все дальнейшие рассуждения сводятся к тому, что первый исчезающий член разложения выражения для $\partial p_4/\partial t$ представляем по дифференциальным операторам второго порядка. И, главное, к этому члену уже ничего нельзя добавить: члены высшего порядка по дифференциальному оператору непременно привели бы к нефизическому поведению функции распределения p_4 .

Можно исходить из других рассуждений. Будем говорить о поведении близких жидких частиц и, что связано с этим, о поведении супермелкомасштабных магнитных полей. Функция распределения расстояния между двумя жидкими частицами r в безразмерной форме записывается в виде $p(r/l_1, tT_2)$, l_1 — наименьший масштаб турбулентности, T_2 — относительная скорость удаления частиц (размерность частоты) (см. подразд. 11). При малых расстояниях ($r \ll l_1$) функция распределения зависит в нулевом приближении по параметру r/l_1 только от tT_2 . В следующих приближениях возникнут пространственные производные в точке $r = 0$. Ясно, что выражение для $\partial p/\partial t$ содержит лишь конечное число пространственных производных. Иначе говоря, уравнение на p есть дифференциальное с входящим в него коэффициентом T_2 . Если, напротив, считать, что ряд, составленный из суммы дифференциальных операторов, в выражении для $\partial p/\partial t$ содержит бесконечное число членов, то фактически мы пришли бы к интегральному уравнению $\partial p/\partial t = \int T(r, r') p(r'/l_1, tT_2) dr'$, учитывающему не просто p и ее производные в точке $r = 0$, а значение p при $r > 0$. Для близких точек это невозможно, уравнение должно получиться дифференциальным. Но, как показано в данной главе, в этом уравнении члены выше второго порядка отсутствуют. Тогда вид уравнения однозначно определяется (для

$\langle \theta(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}') \rangle$ — уравнение (2.62), для $\langle H_i(\mathbf{x}) H_i(\mathbf{x}') \rangle$ — (3.38)). Следовательно, выводы, полученные для супермелкомасштабных полей, не основываются на допущении о дифференцируемости поля скорости и соответственно на представлении уравнения для p_4 в дифференциальном виде. Именно так было изложено в статье [72].

Можно ли отсюда продвинуться дальше, от супермелкомасштабных полей к просто мелкомасштабным? Оказывается, можно. Для этого обратимся опять к уравнению для p_4 и будем полагать, что в правой части выражения для $\partial p_4 / \partial t$ стоит ряд по степеням дифференцируемых операторов. Низшие члены этого разложения выписаны в (3.33). Мы выяснили, что при малых r оно является уравнением только второго порядка. Это означает, что тензоры при высших производных (зависящие только от \mathbf{r}) обращаются в нуль при $r \rightarrow 0$. Но тогда эти тензоры вообще должны обращаться в нуль при не малых r . Дело в том, что p_4 — неотрицательная функция (как плотность распределения вероятностей) и выражение для $\partial p_4 / \partial t$ должно быть неотрицательным. Это приводит к тому, что все тензоры при членах любого порядка по степеням дифференциального оператора представляют собой корреляционные тензоры (высокого порядка). Последние не могут обращаться в нуль при $r = 0$ (это одно из важнейших свойств корреляционного тензора). Итак, члены выше второго порядка не должны присутствовать в выражении для $\partial p_4 / \partial t$. Этим исчерпывается обоснование вида уравнения для p_4 с помощью перехода от динамики супермелкомасштабных полей к мелкомасштабным.

Наглядная интерпретация роста магнитных флюктуаций. В шестидесятых годах было много работ, в которых сопоставлялось поведение вектор-потенциала магнитного поля и поведение самого магнитного поля с различными случайными полями в турбулентности (со скалярной примесью, с градиентом скалярной примеси, с полем вихря $\text{rot } \mathbf{v}$ и т. д.). Выяснилось, что в двумерном случае вектор-потенциал (уже строго) сопоставляется с полем скалярной примеси, а магнитное поле — с градиентом скалярной примеси. Но плоское динамо вообще невозможно, поэтому понятно, что такое сопоставление не обобщается простым образом на трехмерный случай, в котором динамо возможно.

Все эти попытки подытожены в работе Крейкнана и Нагараяна [8]. Авторы показали, что никакие сопоставления и аналогии в этой проблеме недостаточны. Задача в настоящее время в строгом виде не может быть решена, утверждали авторы, и совершенно справедливо. Далее они использовали так называемое приближение прямого взаимодействия Крейкнана для получения уравнения спектральной функции магнитного поля. В это уравнение входит ряд безразмерных констант. При определенном соотношении между этими константами турбулентное динамо имеет место. Авторы указывают на то, что связь между этими константами не может быть получена из самого приближения прямого взаимодействия.

Разработка строгой теории стала возможной после появления

замечательной работы Крейкнана [7], в которой сформулирован лагранжев подход при описании крупномасштабного поля. В этой работе Крейкнан все еще использует малый параметр l/L (отношение масштаба турбулентности к масштабу поля), реальный при наличии крупномасштабного поля. Но главное — там не используется малость τ по сравнению с l/v . После разработки точной модели, в которой получено уравнение для крупномасштабных полей, но не использовался даже малый параметр l/L [48], стало ясно, что в принципе можно построить теорию мелко-масштабных полей, в которой малого параметра нет.

Такая теория построена в работах [72, 75, 76]. Описание динамики магнитных полей в строгом виде стало возможным, но только для области пространства волновых чисел, где имеет место замороженность магнитного поля в плазму. Ибо решение получается с помощью точного решения в лагранжевых координатах, известного только в области, где диссипация несущественна, $k \ll k_H$. Когда речь шла о крупномасштабных полях, такого описания оказалось вполне достаточно: нас в этом случае интересовала динамика крупномасштабной составляющей, и только. При описании мелко-масштабных полей этого оказывается недостаточно, ибо энергия флюктуаций перекачивается в область больших чисел ($k \approx k_H$), где диссипация существенна. И вопрос о конечной судьбе магнитных флюктуаций, будут ли они нарастать по амплитуде или диссипировать, зависит от их динамики в области, где замороженность явно разрушена и существенна диссипация, т. е. при $k \approx k_H$. Поэтому следовало сделать еще один шаг. Понадобилось выяснить поведение решения, довольствуясь областью $k \ll k_H$. Было показано, что уравнение для спектра флюктуаций сводится к эрмитовой форме. Тогда можно пользоваться вариационным принципом для определения собственных значений задачи. Отрицательные собственные значения (соответствующие связанным состояниям в потенциальной яме уравнения Шредингера) отвечают экспоненциально растущим решениям. Тот факт, что нам не известно уравнение для спектральной функции магнитных флюктуаций при $k \approx k_H$, соответствует в квантовой механике тому, что нам известен потенциал не во всей области. Известна только часть потенциальной ямы. Но если нам удастся найти пробную функцию, быстро убывающую вне известной нам части потенциала и придающую функционалу отрицательное значение, то тем самым само существование связанных состояний будет доказано: потенциал эффективно захватывает частицу уже в этой своей области. Другой способ убедиться в наличии связанного состояния (и растущего решения в теории динамо) — это исследовать само собственное решение в известной нам области. Спектральная функция не должна менять знак (и нижняя собственная функция самосопряженного оператора не содержит узлов). Только этого требования достаточно, чтобы определить знак собственного значения E_0 . Именно такими двумя способами и было показано, что $E_0 < 0$, т. е. динамо мелко-масштабного поля имеет место.

Теперь, когда проблема мелкомасштабного динамо решена, можно посмотреть, чему же аналогично поведение вектор-потенциала поля и самого поля. Если бы поведение вектор-потенциала A было аналогично поведению скалярной примеси, т. е. если бы величина $\langle A^2 \rangle$ сохранялась (как это в основном считалось в 60-х годах), то динамо было бы невозможным. А магнитное поле вело бы себя как градиент скалярной примеси: первоначально усиливалось, уменьшаясь в масштабе, а затем диссипировало. Такая концепция, собственно говоря, восходит к идеям Бэтчелора: ведь $\langle v^2 \rangle$ тоже сохраняется при нелинейном взаимодействии, в то время как $\langle (\text{rot } v^2) \rangle$ возрастает. Величина $\text{rot } v$ сопоставлялась с H , а v — с A .

Решение уравнения для вектор-потенциала в виде (2.33) наводит на мысль, что вектор-потенциал ведет себя не как скалярная примесь, а как *градиент скалярной примеси* $\nabla\theta$. Это решение совпадает с решением для $\nabla\theta$ (2.34). Конечно, это предположение не может быть последовательным до конца. Дело в том, что в этом случае поле A' , $\text{rot } A' = A$ (A — «вектор-потенциал вектора-потенциала»), ведет себя как скалярная примесь и мелкомасштабное динамо опять окажется невозможным. Смысл же этого высказывания будет в том, что скорости роста $\langle A^2 \rangle$ и уменьшения масштаба этого поля такие же, как у поля $\nabla\theta$.

Дадим прежде всего наглядную интерпретацию этого высказывания. Напомним, что при наличии замороженности сохраняется поток через жидкий контур $\Phi = \int_s H ds = \oint_c A dx = \text{const}$ (см.

гл. II, подразд. 4). На рис. 3.3 изображен контур, стягивающий поверхность, ортогональную пучку силовых линий (контур изображен замкнутой линией). Жидкие линии растягиваются в турбулентном потоке. Растягивается также и силовая трубка. Из сохранения массы вещества в трубке следует, что по мере ее растяжения поперечное сечение трубки уменьшается. Поперечное сечение и есть масштаб поля L . Сохранение потока Φ означает, что $Hs = HL^2 = \text{const}$, а сохранение циркуляции вектора A — $AL = \text{const}$. Возведем эти равенства в квадрат и получим окончательно

$$\langle A^2 \rangle \sim L^{-2}, \quad \langle H^2 \rangle \sim L^{-4}. \quad (3.99)$$

Градиент скалярной примеси подчиняется закону, тоже совпадающему с законом для $\langle A^2 \rangle$. В самом деле, из того, что $\langle \theta^2 \rangle = \text{const}$, непосредственно следует $\langle (\nabla\theta)^2 \rangle \approx \langle \theta^2 \rangle L^{-2} \sim L^{-2}$, здесь L — масштаб примеси. Второе соотношение в (3.99) (для магнитного поля) объясняет, почему в турбулентной среде скорость роста магнитных флюктуаций превосходит скорость дробления масштабов, т. е. в конечном счете почему имеет место турбулентное динамо. Если бы рост магнитного поля происходил только за счет уменьшения масштаба (как у поля $\nabla\theta$), то мы имели бы закон $\langle H^2 \rangle \sim L^{-2}$. Правильный закон дает более быстрый рост магнитных флюктуаций.

Как же обстоит дело в двумерной турбулентности? В чем различие с трехмерной? Рассмотрим прежде всего динамику поперечных полей \mathbf{H}_\perp (лежащих в плоскости XU). На рис. 3.4 изображен жидкий контур в виде прямоугольника, стягивающий пучок силовых линий. Для наглядности поверхность, которую стягивает контур, изображена «непрозрачной» для ряда силовых линий, входящих «сзади». Нормаль к поверхности перпендикулярна оси z .

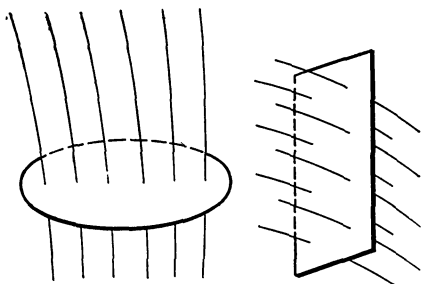


Рис. 3.3.

Силовая трубка магнитного поля при трехмерных движениях

Рис. 3.4.

Пересечение поверхности силовыми линиями при наличии двумерных движений

Кривая контура проходит через две поверхности: $z = z_0$ и $z = z_1$ (нижняя и верхняя части контура, ось z направлена вертикально). На этих поверхностях вид кривой контура произволен. Между этими поверхностями контур соединяется двумя (вертикальными, см. рис. 3.4) прямыми линиями: $x = x_0$, $y = y_0$ и $x = x_1$, $y = y_1$. Пересечение вертикальных линий контура с кривыми на поверхностях $z = \text{const}$ имеет место в точках (x_0, y_0, z_0) , (x_0, y_0, z_1) , (x_1, y_1, z_0) , (x_1, y_1, z_1) . Преимущество жидкого контура, построенного таким образом, заключается в том, что вид его не меняется в процессе двумерного движения жидкости (в плоскости XU). Действительно, ввиду отсутствия зависимости \mathbf{v} от z вертикальные прямые контура так и остаются вертикальными прямыми в процессе движения жидкости. Передвигаются только точки x_0, y_0 и x_1, y_1 (для какого-либо $z = \text{const}$), но сам контур описывается по-прежнему.

Сохранение потока магнитного поля запишем в виде $H_\perp s = H_\perp L (z_1 - z_0) = \text{const}$. Здесь мы представили площадь поверхности в виде $s = L (z_1 - z_0)$, выделяя расстояние $z_1 - z_0$ между верхней и нижней частями контура. Очевидно, что величина $z_1 - z_0$ не меняется в процессе движения. Следовательно, $H_\perp \sim L^{-1}$ и $\langle H_\perp^2 \rangle \sim L^{-2}$, т. е. \mathbf{H}_\perp ведет себя как градиент скалярной примеси.

Что касается вектор-потенциала \mathbf{A} , то сохранение $\oint \mathbf{A} d\mathbf{x}$ означает сохранение самого вектор-потенциала. Дело в том, что вектор-потенциал поля \mathbf{H}_\perp имеет одну z -компоненту, т. е. \mathbf{A} проецируется только на вертикальные прямые контура: $x = x_0$, $y = y_0$ и $x = x_1$, $y = y_1$, длина которых не меняется (и равна $z_1 - z_0$). Иначе говоря, $\oint \mathbf{A} d\mathbf{x} = [A_z(x_0, y_0) - A_z(x_1, y_1)] (z_1 - z_0) = \text{const}$. Отсюда следует $\langle A^2 \rangle = \text{const}$, т. е. \mathbf{A} ведет себя

как скалярная примесь. Итак, медленный рост магнитного поля, $\langle H_{\perp}^2 \rangle \sim L^{-2}$, не дает возможности генерации поля H_{\perp} .

Перейдем к обсуждению поведения поля H_{\parallel} в двумерной турбулентности. Выберем контур так, чтобы он лежал в плоскости $z = \text{const}$. Естественно, в процессе движения жидкости контур останется в этой же плоскости, он только будет деформироваться так, чтобы нормаль к поверхности, которую стягивает контур, была параллельна оси z . Силовые линии пересекают нормально эту поверхность, но силовая трубка не удлиняется, поскольку линии параллельны оси z , а движение вдоль оси z отсутствует. Итак, площадь s остается постоянной, $H_{\parallel}s = \text{const}$, $H_{\parallel} \sim \text{const}$, $\langle H_{\parallel}^2 \rangle = \text{const}$. Следовательно, H_{\parallel} ведет себя как скалярная примесь и не генерируется. Законы изменения A и H в трехмерном и двумерном случаях довольно просто проследить для ситуации, когда масштаб поля мал по сравнению с масштабом турбулентности. Во все наши наглядные рассуждения входил лишь масштаб магнитного поля L . Только масштаб поля скорости не должен быть мал по сравнению с L : в противном случае закон (3.99) станет уже неправильным. Допустим поэтому, что масштаб поля велик по сравнению с L . Тогда уравнение для спектра магнитных пульсаций выписано в (3.39). Следует иметь в виду, что спектральная функция магнитного поля есть $E_H(k) = 4\pi k^2 H(k)$. Следовательно, $H(k)$ — спектральная функция вектор-потенциала, т. е.

$$\langle A^2 \rangle = \int_0^{\infty} H(k) dk. \text{ Поэтому первое равенство в (3.40) описывало}$$

эволюцию $\langle A^2 \rangle$. Мы выпишем его в виде $d\langle A^2 \rangle/dt = 4T_2\langle A^2 \rangle$. Уравнение же (3.41) описывает эволюцию обратного масштаба поля k' , т. е. $k' = 1/L$. Перепишем уравнение в новых обозначениях в двух эквивалентных видах: $dL/dt = -2T_2L$, $dL^2/dt = -4T_2L^2$. Комбинируя уравнения для $\langle A^2 \rangle$ и L^2 , имеем $d\langle A^2 \rangle L^2/dt = 0$, $\langle A^2 \rangle \sim L^{-2}$, что совпадает с (3.99). Что касается

двумерного случая, то согласно (3.95) $\langle A_{\perp}^2 \rangle = \int_0^{\infty} H_{\perp}(k) k^{-1} dk$,

$d\langle A_{\perp}^2 \rangle/dt = 0$, $\langle A_{\perp}^2 \rangle = \text{const}$. Для продольного поля согласно (3.94) имеем $d\langle H_{\parallel}^2 \rangle/dt = 0$, $\langle H_{\parallel}^2 \rangle = \text{const}$.

Общий вывод этого раздела сформулируем следующим образом. Мелкомасштабные поля генерируются в однородной и изотропной турбулентности. Для генерации достаточно, чтобы магнитное число Рейнольдса R'_m было большим. Величина отношения R'_m к R (или кинематической вязкости к коэффициенту омической диффузии D) не существенна для мелкомасштабного динамо, обратное предполагалось после работы Бэтчелора. Генерация обусловлена тем, что рост магнитных флюктуаций данного масштаба оказался более эффективным по сравнению с процессом дробления масштаба поля. Ни тот ни другой из этих двух конкурирующих процессов не зависит ни от вязкости, ни от коэффициента

диффузии. По этой причине отношение R'_m/R несущественно для проблемы.

Скорость нарастания поля определяется наибольшей из частот пульсаций поля скорости, но таких пульсаций, для которых магнитное поле еще заморожено в проводящую жидкость. Поэтому наибольший инкремент нарастания поля зависит от отношения R'_m/R . При $R'_m \gg R$ для пульсаций наименьшего масштаба турбулентности l_1 $R'_m \gg 1$, т. е. магнитные поля заморожены в эти пульсации. Поэтому инкремент нарастания определяется временем жизни пульсаций скорости масштаба l_1 . При $R'_m \ll R$ магнитные поля уже не заморожены в пульсации масштаба l_1 , инкремент определяется поэтому пульсациями больших масштабов. Последние определяются коэффициентом D и ничего не знают о вязкости. Поэтому инкремент уже не зависит от вязкости. Инкремент поля в общем случае вписан в (3.82). Энергия растущих магнитных флюктуаций сосредоточена при малых масштабах, заведомо меньших внешнего масштаба турбулентности l . При $R'_m \gg R$ энергия наиболее быстро растущих магнитных флюктуаций сосредоточена при $k = k_H$, при $R'_m \ll R$ энергия сосредоточена вблизи волнового вектора k_D . Оба предельных волновых вектора выписаны в (3.69).

Замечания о быстром и медленном динамо. В гл. I, подразд. 6, говорилось, что инкремент нарастания поля может в наилучшем случае достигать значения v/l — наибольшей частоты в задаче. Это динамо (по определению, данному в работе [15]) мы называли быстрым. Интересно отметить, что до настоящего времени нет ни одной модели быстрого динамо в регулярном (не турбулентном) поле. Что касается стохастических моделей, то инкремент нарастания крупномасштабного поля, как мы видели в гл. II, есть либо α/L (α^2 -динамо), либо $\sqrt{\alpha\omega/L}$ (α — ω -динамо). Инкремент этот все не достигает своего максимального значения v/l . Дело в том, что α не может быть больше, чем v , и в инкремент входит (большой) масштаб L в знаменатель.

Единственный известный в настоящее время механизм быстрого динамо есть генерация магнитного поля масштаба l (и меньше) в стохастической модели. Это то, что мы называли мелкомасштабным динамо. Именно здесь достигается максимальное значение инкремента v/l . Причем если турбулентность представлена пульсациями скорости с модами разных масштабов, то инкремент соответствует наибольшей частоте v/l из всех масштабов (см. подразд. 9 и предыдущий вопрос данного подраздела).

Другая интересная особенность быстрого динамо (единственно известного!) — это то, что характер движений может быть предельно простым (даже одномерный в данный момент времени). Эта особенность была продемонстрирована на маломодовой модели (типа странного аттрактора) в подразд. 11. Инкремент достигает максимума не в марковской модели, а для $\tau \approx l/v$. В этом

случае он и принимает значение v/l . В каждый момент времени движение описывается простейшим сдвигом, нет никакой гиротропности. Более того, не только усредненная величина $\langle v \operatorname{rot} v \rangle$ обращается в нуль, вообще $v \operatorname{rot} v \equiv 0$ и $a v \equiv 0$, $\operatorname{rot} a = v$. Тем не менее имеет место быстрая генерация поля. Таким образом, предположение о том, что неравенство (1.46) является каким-либо критерием динамо, не оправдывается.

Вообще надо сказать, что сначала антидинамо-теоремы произвели неоправданно большое впечатление на исследователей в этой области. В последнее время выяснилось, что ситуация скорее обратная: антидинамо-теоремы накладывают слишком суровые требования, чтобы представлять сколько-нибудь серьезное ограничение для генерации поля. Иногда авторы, упрощая, формулируют тезис антидинамо-теорем в виде «симметричное динамо невозможно». Это утверждение верно, если накладывать дополнительные, вообще говоря, очень сильные условия запрета, как-то: не только поле скоростей должно быть симметричным, но и магнитное поле, и граничные условия — все должно быть симметричным. Но на самом деле магнитное поле совсем не обязано быть симметричным, мы его не можем задать специальным образом. Мы здесь сформулируем несколько антитезисов по отношению к антидинамо-теоремам.

1. Осесимметричное динамо возможно (магнитное поле не осесимметрично).

2. Осесимметричное динамо возможно даже для осесимметричного магнитного поля. Тороидальная теорема (1.42) запрещает генерацию в случае осевой симметрии, если имеется только тороидальное поле скорости v_φ . Но генерация вообще возможна, если имеются и другие компоненты скорости v_r и v_θ , пусть даже не зависящие от φ .

3. Двумерное динамо возможно (поле скорости в виде двумерного винта). Движение только не должно быть плоским.

4. Генерация магнитного поля при наличии поля скорости с высокой степенью симметрии возможна, если граничные условия несимметричны. Так, дифференциально вращающийся цилиндр представляет собой одномерное движение, плоское и осесимметричное. Тем не менее он генерирует поле (см. гл. I, подразд. 7). Более того, граничные условия могут быть сами по себе симметричными (если дифференциально вращающийся цилиндр поместить в другой, оси цилиндров параллельны, но не совпадают), но симметрия их относительно другой оси и генерация опять становятся возможными.

5. В стохастической модели поле скорости может быть предельно простым (плоским, симметричным) в каждый момент времени. При этом имеет место не просто динамо. Удастся показать, что оно быстрое.

Дробление масштабов в стохастической модели и связь этого процесса с быстрым динамо. В гл. I, подразд. 5, указано, что масштаб поля уменьшается линейно со временем для стационарного

движения. Поэтому если даже модель быстрого динамо для стационарного движения будет построена, все равно время, которое необходимо для выхода на динамо-режим, велико. Формула (1.40) показывает, что время, необходимое для выхода на режим генерации, плюс время самой генерации не может быть меньше, чем $(l/v)(R'_m)^{1/2}$. Ввиду очень больших значений R'_m в астрофизических условиях (10^6 — 10^9) (а для галактических магнитных полей еще больше) это время велико.

Турбулентность дает быстрое динамо. Имеется ли здесь время установления? Нет. Скорость дробления масштабов тоже v/l . Иначе говоря, время уменьшения масштаба поля не $(l/v)(R'_m)^b$, а просто l/v . Формально это можно увидеть, например, из (3.41), описывающего экспоненциальное возрастание эффективного волнового вектора k' . Интересный парадокс: именно дробление масштаба, стремящееся перевести энергию поля в область диссипации и являющееся серьезным конкурентом для другого процесса — роста энергии флуктуаций, дает возможность осуществления быстрого динамо с малым временем установления. Впрочем, этот парадокс является центральным моментом, самой сутью теории динамо. В гл. I, подразд. 5, мы убедились в том, что динамо без уменьшения масштаба и без диссипации немислимо.

Как же представить себе столь быстрое уменьшение масштаба? Почему при стационарном движении уменьшение масштаба происходит линейно со временем, а в стохастической модели — экспоненциально? Вероятно, наиболее простая интерпретация этого явления может быть дана с помощью результатов подразд. 11. На каждом промежутке времени длиной τ поле скорости там стационарно. Согласно гл. I, подразд. 5, уменьшение масштаба происходит линейно со временем. Но это есть асимптотический режим при больших временах: $t \gg l/v$. Если $t \approx l/v$, то стационарное движение уменьшит масштаб поля в несколько раз в лучшем случае. Если $\tau \approx l/v$, то за время τ масштаб уменьшится во столько же раз. На новом промежутке времени новое поле скорости нескоррелировано со старым и взаимодействует с магнитным полем таким же образом, как на прошлом промежутке: опять уменьшает масштаб (уже поля, получившегося в конце первого промежутка) во столько же раз. Таким образом и получается экспоненциальное уменьшение масштаба. В реальной турбулентности дробление масштабов происходит непрерывным образом. Отметим, что для скалярной примеси факт быстрого дробления масштабов хорошо известен. В основе всех рассуждений о динамике скалярной примеси лежит утверждение, что время жизни флуктуации плотности масштаба l есть l/v .

Перейдем к обсуждению роли того факта, что уравнение для магнитных флуктуаций сводится к эрмитовому виду. На первый взгляд это только некая удобная вещь математического характера. В действительности же только одна эрмитовость почти достаточна

для доказательства (правда, не совсем строгого) того, что турбулентное динамо мелкомасштабного поля имеет место! Действительно, допустим обратное: генерации нет. Тогда низшее собственное значение E_0 было бы положительным и $E_0 \approx v/l$ (здесь уже используется свойство самосопряженного оператора, см. подразд. 10). На самом деле эволюция магнитного поля, энергия которого сосредоточена первоначально в масштабах порядка l , происходит за гораздо более короткое время, определяемое временем поворота ячеек, с масштабами гораздо меньшими, чем l (см. подразд. 10). В этих масштабах пульсации скорости искажают квазиподнородные силовые линии. Это было бы возможным, если бы в разложение начального поля по собственным функциям давали основной вклад не низкие гармоники, а высокие, для которых собственные значения E_m были бы большими по сравнению с v/l . Такая ситуация не характерна для решений самосопряженных уравнений: нижнее собственное значение определяет основное время эволюции решения. Далее мы проиллюстрируем это обстоятельство на модельном самосопряженном уравнении. Здесь уместно напомнить, что ситуация, описанная выше, выполняется для градиента скалярной примеси: нижнее собственное значение положительно и $E_0 \approx v/l$, в то время как флюктуации $\nabla\theta$ меняются за время, значительно меньшее, чем l/v (в малых масштабах). Но уравнение для пульсаций $\nabla\theta$ не является самосопряженным и не сводится к таковому. Уравнение же для пульсаций θ является самосопряженным, но здесь как раз и выполняется упомянутое выше свойство самосопряженных уравнений: нижнее собственное значение E_0 определяет время жизни пульсаций θ и является основным временем.

В нашем случае спектральной функции магнитного поля $E_H = 4\pi k^2 H(k)$ сопряжена спектральная функция вектор-потенциала (см. подразд. 6). Последняя совпадает с функцией $4\pi H(k)$; другими словами, $\langle A^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty H(k) dk$. Нетрудно показать, пользуясь уравнением (3.70), что флюктуации вектор-потенциала в пренебрежении диссипацией возрастают:

$$\frac{d \langle A^2 \rangle}{dt} = 4\pi \int \frac{-pq}{p^2 + q^2 + 2pq} \left[1 - \frac{(pq)^2}{p^2 q^2} \right] T(p) H(q) dp dq.$$

Интеграл в правой части положителен. Дело в том, что когда $pq > 0$ и числитель подынтегрального выражения отрицателен, знаменатель велик, а при $pq < 0$ он мал, т. е. область, где числитель отрицателен, дает меньший вклад в интеграл, чем область, где числитель положителен. Выражение в скобке неотрицательно. Итак, $\langle A^2 \rangle$ возрастает, причем в том случае, когда спектр энергии магнитных пульсаций обрезается на масштабах $L \ll l$, величина $\langle A^2 \rangle$ будет нарастать с характерным временем, гораздо меньшим, чем l/v .

В сущности именно эрмитовый характер уравнения для магнитных флюктуаций дает нам возможность судить об асимптотическом поведении решения при больших временах, отбросив при этом диссипационный член. Что невозможно было для регулярного поля скорости — пренебрегать диссипацией при анализе динамо-решений, как это говорилось в гл. I, подразд. 5,6, то оказалось возможным в стохастической модели, где уравнение эрмитово. Проиллюстрируем это высказывание на модельном примере. Пусть нас интересует решение уравнения

$$\partial\psi/\partial t = [-U(x) + D\Delta]\psi, \quad (3.100)$$

сводящееся при переходе к задаче на собственные функции $\psi = \psi_m(x) \exp(-E_m t)$ к стационарному уравнению Шредингера. Оператор правой части (3.100) эрмитов. Пусть $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, минимальное значение U отрицательно: $\min U(x) = U(x_0) < 0$.

В задаче на собственные функции мы ищем потенциальную яму. Полагаем, что яма достаточно глубокая. Более конкретно, пусть отрезок оси x , на котором $U(x) < 0$, имеет длину l . Тогда условие того, что яма глубокая, формулируется в виде $R_U = l^2 |U(x_0)|/D \gg 1$ (аналог большого числа Рейнольдса, $R'_m \gg 1$). Кроме того, нас интересует эволюция решения ψ , начальный масштаб которого L достаточно велик: $R_U = L^2 |U(x_0)|/D \gg 1$ (R_U — аналог другого числа Рейнольдса R_m). Собственные решения (3.100) представляют собой дискретный набор связанных состояний, для которых $E_m < 0$. Легко понять, что условие того, что яма глубокая, как раз и означает, что она содержит большое число уровней с $E_m < 0$ (порядка R'_U). Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (3.100) экспоненциально растет (аналог динамо-решения). Очевидно также, что в самом существовании связанных состояний мы могли бы убедиться, зная $U(x)$ не во всем пространстве, а, скажем, в окрестности x_0 . Для этого мы воспользовались вариационным принципом, причем пробная функция должна быстро убывать вне известной нам окрестности x_0 (аналог того, что нам известно уравнение для спектральной функции не во всей области x , но в существовании растущих решений мы убеждаемся с помощью вариационного принципа). Нижнее собственное значение уравнения (3.100) есть приближенно $E_0 \approx U(x_0) < 0$, т. е. величина $|U(x_0)|$ — инкремент нарастания ψ при $t \rightarrow \infty$.

Но представим себе, что информация об отрицательных собственных значениях уравнения (3.100) у нас отсутствует. Можно ли судить об асимптотическом (при $t \rightarrow \infty$) поведении ψ , если отбросить диссипацию в (3.100), т. е. $D = 0$? Оказывается, да. Решение уравнения (3.100) при $D = 0$

$$\psi(x, t) = \psi(x, 0) \exp(-U(x)t) \quad (3.101)$$

действительно возрастает в области x , где $U(x) < 0$. Возрастание ψ похоже на экспоненту, только «инкремент» зависит от координат. Скорость роста поля, т. е. инкремент, порядка $|U(x_0)|$. Если начальное значение ψ обладало большим масштабом, т. е. при $t = 0$ $R_U \gg 1$, то масштаб поля падает с течением времени. Это видно непосредственно из (3.101): величина $|\psi|^{-1} \partial\psi/\partial x$ растет. Очевидно, что это связано с тем, что при $t \rightarrow \infty$ решение выходит на нижнюю собственную функцию. Характерный масштаб последней L_1 таков, что $L_1^2 |U(x_0)|/D \approx 1$. Очевидно, что $L_1 \ll L$. Отметим, наконец, что упомянутое выше свойство уравнения с эрмитовым оператором — характерное время изменения решения ψ совпадает с обратным нижним собственным значением — в данном случае непосредственно видно из (3.101). Возрастание ψ происходит с наибольшей частотой задачи $|U(x_0)|$, так что в данном случае мы имеем быстрое динамо. Это утверждение можно сделать как из анализа собственных значений уравнения (3.101), так и пользуясь непосредственно решением (3.101).

Итак, все основные свойства асимптотического поведения решения уравнения (3.100) можно получить, если пренебречь диссипацией, что формально оправдано при $R'_U \gg 1$ и $R_U \gg 1$. Для несамосопряженного уравнения все не так. Рассмотрим, в частности, уравнения для скалярной примеси:

$$\partial\theta/\partial t + \partial_j v_j \theta = D_\theta \Delta \theta, \quad (3.102)$$

$vL/D_\theta \gg 1$, $vL/D_\theta \gg 1$, l — масштаб поля скорости, L — начальный масштаб поля θ . Флуктуации плотности θ в конце концов сглаживаются молекулярным коэффициентом диффузии D_θ . Поэтому действительные части собственных значений $\text{Re} E_m$ ($\theta = \theta_m(x) \exp(-E_m t)$) положительны. Если $D_\theta = 0$, получаем совсем другой вывод. В этом случае $\int \theta dx = \text{const}$, $\int \theta^2 dx = \text{const}$, и, следовательно, решение незатухающее, $\text{Re} E_m = 0$. Особенно очевидно это противоречие в одномерной задаче. Пусть $\mathbf{v} = \{0, v(x), 0\}$, решение ищем в виде $\theta = \theta_k(x, t) \exp(ik_x y)$, тогда вместо (3.102) имеем $\partial\theta_k/\partial t + ik_y v(x)\theta_k = D_\theta \Delta \theta_k$. Если $D_\theta = 0$, то решение $\theta_k = \theta_k(x, 0) \exp[-ik_y v(x) t]$ обладает свойством $\theta_k \theta_k^* = \text{const}$. Иначе говоря, мы могли бы прийти к выводу, что собственные значения чисто мнимые, $\text{Re} E_m = 0$. Строгое решение этой задачи (по методу ВКБ) в [77] показало, что (при определенном профиле скорости $v(x)$ и однородных граничных условиях) собственные значения чисто действительны!

Таким образом, анализ асимптотического поведения (при $t \rightarrow \infty$) решения несамосопряженного уравнения (3.102) и уравнения для магнитного поля (1.7) не может быть проведен в пренебрежении диссипацией. Успех теории мелкомасштабных полей связан как раз с тем, что уравнение для спектра флуктуаций сводится к самосопряженному виду. Вместе с тем нельзя сказать, что ис-

пользование стохастических моделей открывает широкие перспективы благодаря тому, что уравнения могут быть проанализированы в пренебрежении диссипацией, а сами уравнения могут быть получены в точном виде без большого труда. Дело в том, что, как сказано в подразд. 6, они не всегда сводятся к эрмитовому виду. Например, можно ли пользоваться таким анализом в случае дифференциально вращающегося цилиндра с угловой скоростью, зависящей случайным образом от времени? Очевидно, нет, поскольку движение является плоским и, как показано в подразд. 12, уравнение для магнитного поля не сводится к самосопряженному виду.

Генерация мелкомасштабных полей в космических условиях. Если теория крупномасштабных полей в кинематической постановке имеет непосредственное приложение в астрофизике, то относительно мелкомасштабных полей так сказать нельзя. В кинематической постановке задачи результаты сводятся к тому, что магнитные флуктуации нарастают. Вопрос о том, к чему это приводит, относится к нелинейной теории, и сравнение с наблюдательными данными может быть проведено после построения нелинейной теории. Сразу ясно только одно: энергия магнитного поля не может неограниченно нарастать. Нелинейная теория будет изложена в следующей главе. Там же будут обсуждены астрофизические следствия мелкомасштабного динамо.

Здесь мы можем только сказать, что условия для генерации мелкомасштабных полей выполняются практически всегда. Они сводятся, как показано выше, только к одному условию — большому магнитному числу Рейнольдса ($R'_m \gg 1$). Как говорилось в гл. I, большие R'_m являются типичными для астрофизики. Следовательно, генерация мелкомасштабных магнитных полей должна иметь место в конвективной зоне Солнца, в солнечной фотосфере и хромосфере, в конвективных оболочках звезд и в межзвездном газе Галактики и т. д. Во всех перечисленных объектах плазма столкновительная, т. е. условия (1.29), (1.30) выполняются, и МГД-приближение применимо. В глубине конвективной зоны Солнца плазма высоко ионизована, поэтому здесь играют роль электрон-ионные столкновения (в законе Ома) и ион-ионные (определяющие вязкость). На поверхности Солнца плазма слабо ионизована и здесь существенны электрон-нейтрал и ион-нейтрал столкновения. Омическая диссипация определяется коэффициентом $D \approx 10^7$ см²/с. Что касается газа Галактики, то здесь он тоже слабо ионизован. Но коэффициент диффузии на десять—двенадцать порядков превышает стандартное значение 10^7 см²/с. Дело в том, что диссипация магнитного поля обусловлена столкновениями ионов с нейтралами [78], приводящими к существенной потере энергии. Тем не менее магнитное число Рейнольдса весьма велико: это связано с большими размерами межзвездных облаков (до 10 пс). Кинематическая вязкость в галактическом газе опреде-

ляется длиной свободного пробега, которая не может быть больше ларморовского радиуса. Размер радиуса Лармора мал по сравнению с размерами неоднородностей, поэтому МГД-приближение вполне применимо.

Для плазмы солнечного ветра МГД-приближение применимо, хотя плазма и бесстолкновительная (см. гл. I, подразд. 3). Уравнение для магнитного поля (1.14) в этом случае описывает, как известно, вмороженность магнитного поля в плазму. Здесь имеется, правда, методическое отличие от столкновительной МГД. В последнем случае можно рассматривать движение жидкости без магнитного поля, тогда магнитная гидродинамика возвращается к просто гидродинамике. В бесстолкновительной плазме движение описывается дрейфами частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях, и без магнитного поля невозможно говорить о движении жидкости. Магнитные поля присутствуют в солнечном ветре. Но происхождение их не связано с затравочными механизмами типа термомеханизмов (которые играют роль внутри звезд и в галактическом газе). Поля эти вморожены в плазму, истекающую из солнечной короны, т. е. в солнечный ветер они попадают «готовыми». Однако, если бы не было турбулентного динамо, энергия магнитных неоднородностей за короткое время l/v (l — размер неоднородности, v — флюктуационная скорость в системе координат, связанной с основным течением солнечного ветра, движущегося со скоростью V) перекачалась бы в мелкие масштабы. При этом они успевали бы пройти расстояние Vl/v . Даже крупные неоднородности размером $l = 10^{11}$ см не успевали бы дойти до орбиты Земли.

В бесстолкновительной плазме солнечного ветра поля не могут иметь размера меньшего, чем ионный ларморовский радиус (см. (1.32)). Для флюктуаций поля (по масштабу близких к ларморовскому радиусу) имеет место сильная бесстолкновительная диссипация типа черенковского затухания. Интересно отметить, что при отсутствии турбулентного динамо в кинематическом приближении эта диссипация никак не могла бы включиться. Пусть, например, магнитное поле ведет себя как градиент скалярной примеси (и динамо поэтому невозможно). При этом рост поля происходит по закону $H \sim L^{-1}$ (L — его масштаб). Но тогда (см. определение (1.32)) $\omega_i L = \text{const}$ и всегда больше тепловой скорости ионов, т. е. L всегда больше ларморовского радиуса. Но в динамической постановке задачи, т. е. при учете обратного действия магнитного поля на движение, рост поля H не может продолжаться неограниченно (хотя это и не было бы собственно динамо-усилением, так как масштаб поля продолжал бы неограниченно убывать). Когда энергия поля H масштаба L достигнет энергии пульсаций скорости, то рост H прекратится. Тогда магнитное поле начнет вести себя как само поле скорости, т. е. энергия его и масштаб будут падать. В конце концов масштаб L дойдет до радиуса Лармора и поле диссипирует. При этом в солнечном ветре останутся только сверх-

тепловые флюктуации скорости (поскольку скорость ветра больше скорости звука, всякие препятствия могут порождать как ударные волны, так и сдвиговые движения со сверхтепловой скоростью). Последние еще могут быть интерпретированы в гидродинамическом смысле, все же дотепловые движения «размазываются» тепловым разбросом функции распределения частиц. Таким образом, диссипация типа черенковского затухания в бесстолкновительной плазме заменяет омическое затухание столкновительной плазмы. Выше было показано, что скорость роста магнитных флюктуаций превосходит скорость дробления масштабов. Это преобладание не зависит от диссипации, поэтому в области волновых чисел, где применимо уравнение (1.14), т. е. где черенковское затухание еще не сказывается, будет иметь место турбулентное динамо магнитных полей. Установившиеся спектры турбулентности будут получены в следующей главе.

МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ БОЛЬШИХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

1. Основные задачи

Большое количество задач прикладной магнитной гидродинамики связано с расчетом течений жидкости при наличии магнитного поля. Здесь зачастую невозможно разделить крупномасштабную и мелкомасштабную составляющие скорости. Поэтому для турбулентных течений развивается теория, не похожая на то, с чем мы имели дело выше. Вместе с тем для турбулентных течений в прикладных задачах не характерны большие магнитные числа Рейнольдса. В этой связи магнитные поля и движения в космосе сильно отличаются от течений в каналах и т. п. Впрочем, недавно указывалось на то, что реакторы-размножители с натриевым охлаждением будут работать при значительных R'_m в условиях турбулентного течения жидкого натрия, поскольку обычное число Рейнольдса должно быть порядка 10^7 . Это явление впервые предсказано в работе [79] и затем интенсивно исследовалось в статье [80]. Последняя работа неоднократно цитируется ниже. Сейчас мы только процитируем окончательное заключение авторов: «Проектировщики ядерных реакторов обычно верят, что «большое — это прекрасно». Конкурируя с Солнцем в производстве энергии, они также могут обнаружить неожиданные инженерные приложения физики звезд и планет». Под «большим» авторы подразумевают большие размеры реакторов, при которых число R'_m становится тоже большим.

В своем изложении мы ориентируемся только на астрофизические аспекты данной проблемы. Разделяем поля, как и выше, на крупномасштабные и мелкомасштабные. Здесь имеются две основные задачи.

1) Выяснить установившиеся спектры флуктуаций (магнитных и поля скорости).

2) Выяснить динамику крупномасштабных полей — средних полей \mathbf{B} и \mathbf{V} (магнитное поле и поле скорости) — с учетом обратного действия магнитного поля на движение. Иными словами, задача состоит в формулировке макроскопической магнитной гидродинамики.

Относительно первой задачи можно сказать, что до создания теории мелкомасштабного динамо об установившемся состоянии

можно было бы только гадать. «Последним словом» в этом отношении была уже упоминавшаяся работа Крейкнана и Нагараяна [8]. В ней авторы как раз и приходят к выводу о том, что ответ окончательно дать невозможно (если это можно назвать выводом). Авторы поступили наиболее последовательно. Они разобрали все возможности, рассмотрев при этом случаи: турбулентного динамо нет и какой спектр флуктуаций установится, если турбулентное динамо есть. В подразд. 2 наст. главы результаты сформулированы однозначно.

Что касается второй задачи, то здесь можно сказать следующее. Кинематическая постановка задачи о динамике крупномасштабных магнитных полей может быть названа макроскопической электродинамикой. Здесь, так же как в электродинамике сплошных сред, имеются микроскопические поля, в данном случае такие, масштабы которых сравнимы с масштабами турбулентности, и называемые нами мелкомасштабными полями, и средние макроскопические поля. Уравнения Максвелла в сплошной среде могут быть получены эвристическим путем с помощью введения неких коэффициентов — электропроводности и магнитной проницаемости. Строгий вывод уравнений может быть получен только с помощью кинетической теории и статистической физики. Вывод уравнений макроскопической электродинамики приведен в гл. II с помощью методов, аналогичных кинетической теории.

Попытки построения нелинейной теории предпринимались давно (впервые в [81]). Однако до сравнительно недавнего времени известны лишь разрозненные эффекты. Они перечислены в монографии [1]. Основная задача, которая стояла в начале развития нелинейной теории, состояла в поисках нелинейных эффектов, стабилизирующих рост поля. Ясно, что такие эффекты должны возникнуть, ибо неограниченное возрастание энергии поля, предсказываемое линейной теорией, очевидно, невозможно. Было обнаружено явление магнитной гиротропности — гиротропности поля скорости, которая возникает в результате действия электромагнитных сил (и возникающая даже в невращающейся среде). Магнитная гиротропность обладает знаком, противоположным знаку обычной, если последняя присутствует в турбулентной среде, и поэтому стабилизирует рост поля в виду того, что именно гиротропность (обычная) является источником генерации. Затем был обнаружен β -эффект: генерация магнитного поля за счет гиротропности хаотического магнитного поля. Как выяснилось, β -эффект действует обратно α -эффекту. Иначе говоря, если поле первоначально генерируется α -эффектом, то магнитные флуктуации становятся гиротропными. Причем знак гиротропности магнитного поля таков, что β -эффект генерирует поле со знаком, противоположным знаку того поля, которое генерирует α -эффект. Иными словами, β -эффект и есть стабилизирующий эффект. Выяснилось, что этот последний эффект стабилизации является наиболее действенным.

Однако все эти рассмотренные задачи являются лишь фрагмен-

тами теории. Оставалось много других задач, которые вообще не решались даже качественно. Перечислим их.

1. Как повлияют магнитные флюктуации на турбулентный коэффициент диффузии магнитного поля D_T . Не прекратится ли вообще диффузия из-за того, что энергия крупномасштабного поля не сможет перекачиваться в область мелких масштабов, т. е. не помешают ли магнитные флюктуации этой перекачке, без которой диффузия невозможна?

2. Какова будет реакция турбулентности на крупномасштабное поле скорости V ? К каким следствиям для динамики V приведет наличие магнитных флюктуаций?

3. Какие нелинейные эффекты являются главными и какие второстепенными? Какие эффекты следует учитывать в первую очередь при практических расчетах?

Короче говоря, возникла необходимость в создании последовательной теории *макроскопической магнитной гидродинамики*, или магнитной гидродинамики средних полей. В последнее время появилась возможность построения такой теории, и она будет изложена в данной главе. Надо, однако, оговориться, что нелинейная теория не может быть в настоящее время построена с той же степенью строгости, как линейная (см. гл. II). Имеется последовательный подход, обладающий многими положительными свойствами (см. подразд. 3). Далее при изложении материала нам будет удобнее поменять порядок рассмотрения вопросов по сравнению с принятым выше при построении линейной теории. Там мы сначала изложили теорию крупномасштабных полей (см. гл. II), а затем мелкомасштабных (см. гл. III) по степени сложности материала. Здесь такой подход был бы непоследовательным. В первую очередь нам нужно знать динамику мелкомасштабных полей, а потом уже, пользуясь результатами об энергетике этих полей, строить теорию крупномасштабных.

2. Установившиеся спектры турбулентности

Установление стационарного состояния. В гл. III выяснено, что мелкомасштабные поля генерируются турбулентной средой. Это явление происходит как бы локальным образом, т. е. пульсации скорости каждого масштаба генерируют поле этого же масштаба. Наиболее быстрая генерация имеет место в супермалых масштабах. Иными словами, максимум энергии экспоненциально растущих флюктуаций расположен в области больших волновых векторов k , $k \gg 2\pi/l$. Энергия же пульсаций скорости, наоборот, убывает с ростом k и при $k \gg 2\pi/l$ много меньше основной кинетической энергии турбулентности. Поэтому нелинейные эффекты вступают в игру в первую очередь в очень малых масштабах. Именно в этих масштабах в первую очередь плотность энергии магнитных флюктуаций сравнивается с плотностью энергии пульсаций скорости, и дальше энергия магнитных флюктуаций (в этих очень малых масштабах!) уже не растет. Таким образом, в супермалых

масштабах устанавливается равномерное распределение магнитной и кинетической энергий.

Почему нужно говорить именно о равномерном распределении? Может ли энергия магнитных пульсаций превосходить энергию пульсаций скорости? Допустим, что ответ на этот вопрос положительный. Тогда нелинейный член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ несуществен в уравнении движения (1.24), и оно имеет вид

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = - \nabla p / \rho + (1/4\pi\rho) [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] \quad (4.1)$$

(вязкость χ в интересующих нас масштабах несущественна, внешние силы \mathbf{F} в этих масштабах тоже отсутствуют). Электромагнитная сила, отвечающая мелкомасштабным флюктуациям, не может обращаться в нуль. В частности, бессиповое (или даже бестоковое) поле $\text{rot } \mathbf{H} = a\mathbf{H}$ не может соответствовать мелкомасштабным магнитным флюктуациям, ибо оно образуется только за счет внешних полей и не может существовать самосогласованным образом в виде статистически однородных полей. Электромагнитная сила не может быть строго потенциальна (и компенсироваться поэтому давлением в (4.1)). Действительно, в этом случае непотенциальная составляющая скорости «не чувствовала» бы электромагнитную силу, и последнюю можно было бы внести в давление. Но тогда усиление магнитного поля продолжалось бы неограниченно и обратная реакция на поле скорости отсутствовала бы. Это противоречит сохранению энергии $\langle H^2 \rangle / 8\pi + \rho \langle v^2 \rangle / 2 = \text{const}$, которое непосредственно следует из усредненных уравнений магнитной гидродинамики (без внешних сил и диссипации).

Непотенциальная составляющая вызовет согласно (4.1) рост $\langle v^2 \rangle$. Отметим, что для случайных магнитных полей, распределенных по Гауссу, нет даже вопроса о характере электромагнитной силы. Как показано в [15], она в этом случае непотенциальна и вызывает рост $\langle v^2 \rangle$. Такой процесс назван в [15] процессом, «противоположным динамо», он и возвращает энергию магнитных флюктуаций к уровню равномерного распределения, если они оттуда вышли. Заметим, что все изложенные выше рассуждения относились к инерционной области. При $R'_m \gg R$ усиление магнитного поля будет иметь место в области диссипации скорости $L < l_1$ (L — масштаб поля, l_1 — вязкий масштаб турбулентности). Для описания генерации скорости электромагнитной силой в уравнении (4.1) следует учесть вязкость. Из-за вязкого затухания пульсаций скорости энергия магнитных флюктуаций может превзойти кинетическую энергию. Генерация поля продолжается до тех пор, пока основная энергия пульсаций вихря будет все еще сосредоточена в масштабе l_1 .

Этап установившегося равномерного распределения в супермалых масштабах не может быть окончательным. Дело в том, что в больших масштабах, где энергия магнитных флюктуаций все еще мала по сравнению с кинетической, генерация поля будет продолжаться (как неоднократно отмечалось, генерация носит квазилокальный характер). Иными словами, скорость роста энергии поля в этих

масштабах больше скорости дробления масштабов, и это преобладание относится к каждому масштабу. Более того, поток в область больших волновых векторов несколько уменьшается, поскольку в области, где наступило равнораспределение при $k = k_D$, поток энергии уже стал меньше по сравнению с первоначальным. Установление равнораспределения при $k = k_D$, а затем при $k = k' < k_D$ эквивалентно тому, что при $k = k_D$ (или при $k = k' < k_D$) мы имеем граничное условие диссипации. Если установление равнораспределения происходит при $k = k_D$, то это эквивалентно учету

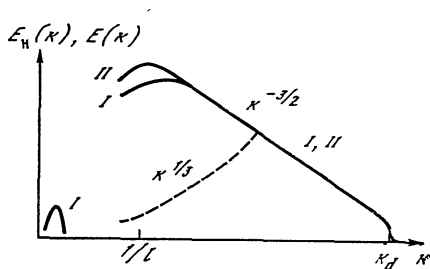


Рис. 4.1.

Спектры установившихся пульсаций магнитного поля $E_H(k)$ (I) и поля скорости $E(k)$ (II)

диссипационного члена для спектральной функции $k^2 D H$, существенного при $k > k_D$. Если же равнораспределение устанавливается при $k = k' > k_D$, то это эквивалентно учету диссипации в виде $k^2 D_T(k') H$, где $D_T(k') = \nu_k/k'$ — коэффициент диффузии, обусловленный пульсациями скорости с волновым вектором k' . В любом случае при $k \ll k'$ генерация все еще продолжается до тех пор, пока равнораспределение не наступит во всех масштабах. Речь все еще идет о малых масштабах, т. е. сравнимых и меньших внешнего масштаба турбулентности l . Весь процесс установления равнораспределения произойдет за время l/v .

Что касается энергии поля в масштабах, несколько превышающих l , то здесь ситуация сложнее. Режим турбулентности как гидродинамической, так и магнитогиродинамической в этой области не может быть универсальным. Ясно, что магнитные поля здесь в кинетнематическом приближении тоже генерируются, поэтому энергия магнитных пульсаций близка к энергии пульсаций скорости. В этой области существует источник турбулентности, и поэтому пульсации скорости и магнитные пульсации оказываются неравноправными. При этом возможны две ситуации. В первой источник энергии турбулентности генерирует именно поле скорости. Тогда энергия последнего будет несколько преобладать в области масштабов порядка l над энергией магнитных флюктуаций. По-видимому, конвективная неустойчивость при неслабых магнитных полях будет генерировать в первую очередь именно пульсации скорости. Во второй ситуации имеется источник магнитных неоднородностей. Это имеет место в турбулентности магнитных полей солнечного ветра, в котором энергия магнитных неоднородностей черпается в первую очередь из энергии полей солнечной короны. Так будет и в случае, если неустойчивость, приводящая к турбулентности, вызывает рост прежде всего именно маг.

нитного поля. При этом в масштабах, близких к l , появится некоторое преобладание магнитной энергии над кинетической. На рис. 4.1 изображена первая ситуация: некоторое преобладание кинетической энергии над магнитной.

На данном этапе теория, к сожалению, не может предсказать разницу между магнитной и кинетической энергиями в области масштабов порядка l . Это тем более печально, поскольку данная область является энергосодержащей, т. е. в ней сосредоточена основная энергия. Введем величину δ , которая определяется из равенства

$$\rho \langle v^2 \rangle / 2 - \langle H^2 \rangle / 8\pi = \rho \langle v^2 \rangle \delta / 2. \quad (4.2)$$

При $\delta = 0$ имеет место полное равномерное распределение во всех масштабах. Если сама турбулентность генерируется в виде флуктуаций скорости, то $\delta > 0$, причем δ меняется в пределах $0 < \delta < 1$. В действительности δ не может приближаться к единице: в этом случае $\langle H^2 \rangle / 8\pi \ll \rho \langle v^2 \rangle / 2$, что противоречит заключению предыдущей главы о генерации мелкомасштабного поля. Отрицательное значение δ соответствует преобладанию магнитных пульсаций над кинетическими. Предельный случай $|\delta| \gg 1$ соответствовал бы $\langle H^2 \rangle / 8\pi \gg \rho \langle v^2 \rangle / 2$ и, как сказано, был бы нереализуем.

Спектры установившегося состояния. Спектры магнитных и кинетических пульсаций при $kl \gg 1$ одинаковы — это есть следствие равномерного распределения. Впервые они были получены в работе Крайкнана [83]. Энергия пульсаций падает с ростом волнового числа. Можно записать, что $H_k \ll H_0$, H_k — напряженность поля для флуктуаций с волновым вектором k , H_0 — напряженность энергосодержащих флуктуаций, т. е. $H_0^2 = \langle H^2 \rangle$. Кроме того, из свойства равномерного распределения следует, что $v_k \sqrt{4\pi\rho} = H_k$. Такие флуктуации представляют собой волны с волновым вектором k на фоне квазиоднородного магнитного поля H_0 .

Напомним, что в приближении магнитной гидродинамики известны три типа волн. В однородном поле H_0 имеется альфвеновская волна с частотой $\omega = v_A k$, $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho}$, скорость v_A называется альфвеновской скоростью. Эта волна распространяется вдоль магнитного поля. Две другие волны имеют следующее дисперсионное соотношение: $(\omega_{1,2}/k)^2 = 1/2 (v_A^2 + s^2) \pm \pm 1/2 [(v_A^2 + s^2)^2 - 4v_A^2 s^2 \cos^2 \theta]^{1/2}$, $\cos \theta = v_A k / v_A k$ — и называются ускоренной, или быстрой (со знаком плюс в дисперсионном соотношении), и замедленной, или медленной (со знаком минус), магнитозвуковой волной (см. [83]).

В столкновительной плазме условие несжимаемости означало $v \ll s$. Поскольку, кроме того, условие равномерного распределения может быть записано в виде $v = v_A$, мы должны считать, что

$$v_A \ll s. \quad (4.3)$$

В бесстолкновительной плазме самосогласованные поля тоже характеризуются условием $v_A < s$, это неравенство следует из того, что $\beta > 1$ (см. гл. I, подразд. 3). В данном случае поле H_0 тоже

является самосогласованным, т. е. не возбуждается внешними источниками, поэтому $\beta > 1$, что эквивалентно неравенству (4.3). При выполнении (4.3) можно записать следующие дисперсионные соотношения: для быстрой магнитозвуковой волны (которая представляет почти звуковые возмущения) $\omega_1 k^{-1} = s + 1/2 v_A^2 s^{-1} \sin^2 \theta$ и для медленной $\omega_2 = v_A k$ (последняя по частоте совпадает с альфвеновской). Быстрая волна не представляет для нас интереса, так как нас в данном случае интересуют несжимаемые (или почти несжимаемые) движения. Мы можем ее не учитывать, так же как мы выше не вводили в рассмотрение звуковые колебания при анализе турбулентности.

Все нелинейные процессы определяются взаимодействием альфвеновской и медленной магнитозвуковой волны (для плазмы с $\beta \approx 1$ имеется также взаимодействие с быстрой волной). Альфвеновская волна является точным решением нелинейных уравнений, поэтому самовоздействие у нее отсутствует. Она, однако, может распадаться на пару, состоящую из альфвеновской и замедленной. Такая же неустойчивость (которая называется распадной) характерна для замедленной волны. Матричные элементы взаимодействия входят в кинематическое уравнение для числа волн (т. е. фактически для спектра мощности). Стационарное решение кинематического уравнения и даст установившийся спектр. Но матричные элементы в общем случае чрезвычайно громоздки. Тут сказывается анизотропия флуктуаций, вызванная в первую очередь самим однородным магнитным полем H_0 .

Нас, однако, здесь не интересуют детальные спектры внутри каждой неоднородности масштаба l . Ведь в данном случае поле H_0 обладает масштабом хотя и большим по сравнению с длиной волны $2\pi/k$, но все же конечным и равным l . Если говорить о флуктуациях полей, усредненных по пространству или по неоднородностям масштаба l , то такие флуктуации уже однородные и изотропные. Теперь уже нет избранного направления, параллельного H_0 , ибо сам вектор H_0 представляет собой случайное поле.

Для получения спектра воспользуемся результатом гл. II, подразд. 10, где нелинейное взаимодействие волн было охарактеризовано обратным временем жизни (декрементом распада волны) в виде $\gamma_1 = \omega M^2$. В данном случае число Маха M определяется как $M = v_k/v_A = H_k/H_0$ (альфвеновское число Маха). Сохранение потока энергии в область больших волновых чисел запишется в виде $v_k^2/\tau(k) = v_k^2 \gamma_1 = \text{const}$. Оценивая частоту ω как $\omega = v_A k$ (напомним, что мы имеем сейчас дело с изотропным случаем), кроме того, учитывая, что v_A соответствует квазиоднородному полю H_0 , т. е. v_A не зависит от k , получим

$$\begin{aligned} \omega v_k^4 &\sim \text{const}, \quad v_k^2 \sim k^{-1/2}, \\ E_H(k) &= 4\pi\rho E(k) \sim k^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Спектр Крейкнана пропорционален $k^{-3/2}$, он изображен на рис. 4.1. Почему же в данном случае не получился колмогоровский спектр

$k^{-3/2}$? Дело в том, что взаимодействие на этот раз не является локальным. Поле H_0 , масштаб которого сильно отличается от рассматриваемой длины волны $2\pi/k$ (и равен l) дает новую характерную частоту $v_A k$. Именно поэтому можно в данном случае говорить о волнах и их взаимодействии. В обычной гидродинамической турбулентности поле скорости масштаба l очень слабо влияет на динамику супермелкомасштабных пульсаций: оно только переносит их, почти не деформируя. Эти пульсации как бы заморожены в течение масштаба l . Магнитное поле гораздо более существенным образом влияет на мелкомасштабные пульсации.

Закон изменения времени жизни пульсаций с волновым вектором k есть

$$\tau(k) = \frac{l}{v_A} \frac{1}{(kl)^{1/2}} = \frac{l}{v} \frac{1}{(kl)^{1/2}} \quad (4.5)$$

(вместо $\tau(k) \sim k^{-2/3}$ для обычной турбулентности). При приближении волнового вектора к значению $1/l$ время жизни пульсации приближается к значению l/v . Таким образом, в основном масштабе турбулентности l сохранилось основное свойство, касающееся времени корреляции и времени жизни, характерное для колмогоровской турбулентности: время жизни пульсации с волновым вектором k есть $(kv_k)^{-1}$. При $kl \gg 1$ время $1/kv_k$ меньше, чем определенное в (4.5). Поток энергии в область больших волновых чисел равен

$$\left(\frac{\rho \langle v^2 \rangle}{2} + \frac{\langle H^2 \rangle}{8\pi} \right) \frac{v}{l} = \rho \langle v^2 \rangle \frac{v}{l} \quad (4.6)$$

(считаем $k = 1/l$ в (4.5)) и совпадает (с точностью до безразмерного параметра порядка единицы) с потоком энергии в колмогоровской турбулентности. Уже отсюда видно, что опасение некоторых авторов о том, что усилившиеся в динамо-процессе магнитные поля подавят поток в область больших волновых чисел, не оправдывается. Отметим, также, что (4.6) есть фактически мощность нагрева плазмы турбулентностью. Нагрев этот может играть существенную роль в балансе тепловой энергии космической плазмы.

Перейдем к вопросу о возможности возникновения перемежаемости в развитой турбулентности с магнитными полями. Как говорилось в гл. II, подразд. 3, явление перемежаемости аналогично укрупнению фронта в акустической волне и образованию разрывов в газовой динамике. В данном случае укрупнение фронта тоже возможно. Действительно, распад волны на две подчиняется законам сохранения энергии и импульса: $\omega = \omega_1 + \omega_2$, $k = k_1 + k_2$ (ω , k — частота и волновой вектор распадающейся волны, ω_1 , ω_2 , k_1 , k_2 — частоты и волновые векторы волн, на которые распадается данная волна). То, что выписанные равенства есть действительно законы сохранения, ясно видно при умножении их на постоянную Планка \hbar . Тогда $\hbar\omega$ — энергия кванта, $\hbar k$ — его импульс. Закон дисперсии $\omega(k)$ для волн может быть таким, что условия распада не выполняются. Тогда волны являются нераспадными, и их взаи-

модействие определяется уже более высоким порядком теории возмущений, а именно четырехволновым взаимодействием. Эти условия могут удовлетвориться при распаде волны на одну определенную пару волн. В этом случае спектр называют распадным и кинетическое уравнение для волн может быть получено в приближении трехволнового взаимодействия. Дисперсионная связь для альфвеновских волн и медленного магнитного звука $\omega(k) = v_A k$ дает возможность распада волны на множество пар волн. Спектр «слишком распаден». Это обстоятельство и приводит к укрупнению фронта волн. Точно таким же образом обстоит дело со спектром акустических колебаний, $\omega = sk$, и этот спектр тоже слишком распаден. Именно поэтому и образуются разрывы: волна распадается на волны во все большими и большими волновыми векторами, что и приводит к возникновению пилообразного профиля волны. Заметим, что альфвеновская волна не распадается на волны такого же типа: матричные элементы альфвеновского взаимодействия обращаются в нуль. Но альфвеновская волна может распасться на пару: альфвеновская волна и замедленный звук. В общем случае, когда принятое нами условие $\beta \gg 1$ не выполняется, а просто имеется неравенство $\beta > 1$, закон $\omega(k) = v_A k$ для замедленных волн дополняется дисперсионными поправками. При этом распадные условия уже не так просто удовлетворить. Тем не менее укрупнение фронта волны, по-видимому, будет иметь место. Это связано в конечном счете с сжимаемостью МГД-колебаний. Только для альфвеновской волны строго выполняется $\text{div } \mathbf{v} = 0$, для других волн $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$. Укрупнение фронта волн приведет к тому, что показатель спектра мощности (4.4) станет больше $3/2$. В предельном случае пилообразного профиля он примет вид $E(k) \sim k^{-2}$. Спектр турбулентности обрезается в области диссипации. С учетом омической диссипации (коэффициент D) и вязкой (коэффициент вязкости χ) получим предельный волновой вектор k_d , при котором диссипация существенна. Для этого приравняем обратное время жизни γ_2 вязкой частоте $\gamma_2(k_d) = k_d^2 (D + \chi)$, $k_d = [v l^{-1/2} (D + \chi)^{-1}]^{2/3} = l^{-1} [R'_m R (R'_m + R)^{-1}]^{2/3}$. При $k < k_d$ нелинейные процессы взаимодействия волн существенны, и при этих k и имеет место спектр Крейкнана (4.4). В область $k \gg k_d$ волны не могут проникать, поток энергии в эту область уже отсутствует, так как нелинейное взаимодействие там полностью подавляется диссипацией. Поэтому при $k > k_d$ спектр пульсаций быстро затухает (как показано на рис. 4.1). Для бесстолкновительной плазмы (солнечного ветра) диссипацию дает черенковское затухание волн. Спектр при этом обрезается на масштабе ионного циклотронного радиуса, т. е. в этом случае $k_d = 1/\rho_i$ (см. (1.32)).

Роль крупномасштабных полей. Рассмотрим влияние крупномасштабного поля на формирование спектра турбулентности. Введем для этого безразмерный параметр

$$\beta' = 4\pi\rho \frac{\langle v^2 \rangle}{B^2} \quad (4.7)$$

— отношение плотности энергии турбулентности к плотности энергии крупномасштабного поля. Теория динамо приводит в основном к большой величине β' , $\beta' \gg 1$. Обсудим поэтому сначала именно этот случай. Поток энергии крупномасштабного поля в область масштабов турбулентности обусловлен турбулентной диффузией крупномасштабного поля. Поэтому его можно оценить как $D_T L^{-2} B^2/8\pi = \frac{1}{3} v l^{-1} (l/L)^2 B^2/8\pi$, L — масштаб поля $B, L \gg l$. Этот поток при $\beta' \gg 1$ значительно меньше (в $\beta' (L/l)^2$ раз) потока, обусловленного нелинейным взаимодействием (4.6). Поэтому можно сказать, что слабое крупномасштабное поле (слабое в смысле $\beta' \gg 1$) не влияет на мелкомасштабные поля.

Если бы турбулентность не вызывала генерацию мелкомасштабных полей, то при отсутствии крупномасштабного поля мелкомасштабные магнитные флюктуации в стационарном состоянии тоже отсутствовали бы. При наличии крупномасштабных полей магнитные флюктуации тоже присутствуют. На рис. 4.1 штрихом изображен спектр магнитных флюктуаций в случае, если бы вектор-потенциал A вел себя как скалярная примесь. При этом в области волновых чисел, где $\rho v_k^2 \gg H_k^2/8\pi$, спектр пульсаций скорости был бы колмогоровским. Следовательно, спектр пульсаций скалярной примеси $E_\theta \sim k^{-5/3}$, а спектр магнитных пульсаций $E_H \sim k^{1/3}$. Энергия магнитных пульсаций, содержащаяся в масштабе l , была бы связана с энергией крупномасштабного поля следующим соотношением: $\langle H^2 \rangle = B^2$ при $k = 2\pi/l$ (ср. с (3.93)). На рис. 4.1 изображена энергия крупномасштабного поля в виде локального максимума при малых волновых числах.

Как говорилось в гл. III, подразд. 1, энергия флюктуационных магнитных полей в астрофизических условиях, как правило, превышает энергию крупномасштабного поля. Причем под энергией флюктуаций в этом случае подразумевается энергия флюктуаций наибольшего масштаба турбулентности l (поскольку флюктуации меньших масштабов обычно не позволяет наблюдать ограниченная разрешающая способность инструментов). Как видно из рис. 4.1, спектр энергий магнитных флюктуаций, изображенный штрихом, дает слишком низкую плотность энергии не только в области $k = 2\pi/l$, но и малую полную плотность энергии магнитных флюктуаций по сравнению с $\rho \langle v^2 \rangle/2$, а значит, малую и по сравнению с $B^2/8\pi$ (учитывая, что мы полагаем $\beta' \gg 1$). Следовательно, наблюдательные данные не подтверждают наличие спектра магнитных флюктуаций, изображенного на рис. 4.1 штрихом, и тем самым дают косвенное подтверждение наличия мелкомасштабного динамо.

Интересно отметить, что растущий спектр магнитного поля $k^{1/3}$, изображенный на рис. 4.1 штрихом, привлекался некоторыми авторами для объяснения тонкой структуры магнитных полей в солнечной фотосфере. Как показывают наблюдения, энергия магнитных полей растет с уменьшением масштаба, причем полная энергия превосходит кинетическую энергию пульсаций скорости (и достигает величины тепловой энергии). В этой связи использует-

ся формула, дающая соотношение между крупномасштабным и пульсационным полем:

$$\langle H^2 \rangle = R'_m B^2, \quad (4.8)$$

которая, конечно, соответствует весьма большой энергии пульсаций. Кроме того, она соответствует предположению о том, что магнитное поле ведет себя как градиент скалярной примеси. Тогда $E_H \sim k^{1/3}$ и соотношение (4.8) получается. Если даже игнорировать результаты гл. III о мелкомасштабной генерации магнитных полей, формула (4.8) все же не сможет объяснить тонкую структуру поля на Солнце. Дело в том, что, как это видно из рис. 4.1, спектр $k^{1/3}$ переходит к точке пересечения спектра поля скорости со спектром $k^{-2/3}$ в другой — в спадающий. Соотношение (4.8) представляет собой максимально большие флуктуации $\langle H^2 \rangle$, когда пересечение упомянутых спектров происходит в области диссипации. Но в этом случае, как легко показать, общая плотность энергии флуктуаций $\langle H^2 \rangle / 8\pi$ в $(R'_m)^{2/3}$ раз меньше, чем $\rho \langle v^2 \rangle / 2$. (То, что энергия $\langle H^2 \rangle$ всегда меньше, чем $4\pi \rho \langle v^2 \rangle$, видно непосредственно из рис. 4.1.) Эта ничтожная плотность энергии соответствует $\beta' = (R'_m)^{2/3}$, т. е. ничтожно слабому крупномасштабному полю: при больших полях растущий спектр $k^{1/3}$ заменяется на падающий при $k < k_D$, т. е. не в области диссипации, и формула (4.8) неверна. В реальных условиях солнечной фотосферы $\beta' \approx 10 \div 100$, что намного порядков меньше, чем $(R'_m)^{2/3}$.

До сих пор мы обсуждали случай слабых полей, $\beta' \gg 1$. Рассмотрим ситуацию сильных полей, $\beta' \ll 1$. Далее мы увидим, что теория динамо не дает такого соотношения для установившегося спектра, т. е. сильные поля не могут генерироваться. Но это не означает, что ситуация $\beta' \ll 1$ вообще нехарактерна для космических полей. Сильные поля встречаются в астрофизике, примером могут служить солнечные пятна. Возникновение такого поля можно понять на примере солнечных пятен. Генерация его происходит во внутренних областях конвективной зоны Солнца, где выполняется $\beta' \gg 1$ (благодаря огромной плотности вещества). Магнитные поля пятен выходят на поверхность, как считается, из-за плавуности (обнаруженной Паркером). На поверхности плотность меньше, и величина β' становится малой. Аналогично обстоит дело с магнитными полями хромосферы и короны Солнца: для них обычно выполняется неравенство $\beta' \ll 1$, и это все из-за низкой плотности хромосферы и короны.

Флуктуации на фоне таких сильных магнитных полей представляют собой МГД-волны. Для них условие равномерного распределения $\rho \langle v^2 \rangle / 2 = \langle H^2 \rangle / 8\pi$ выполняется автоматически (оно характерно для всех трех типов волн). Еще один возможный вариант реализации турбулентности — в виде двумерной (см. гл. II, подразд. 3). Но для этого поле должно обладать чрезвычайно простой конфигурацией. Вопрос о взаимодействии крупномасштабных полей с волнами мы обсудим в подразд. 6. Что касается случая $\beta' \approx 1$,

то он не поддается детальному анализу. Можно только сказать (довольно тривиальную вещь), что он является промежуточным между $\beta' \gg 1$ и $\beta' \ll 1$.

3. Диффузионное приближение в теории турбулентности

Мы изложим здесь приближение теории турбулентности, которое обладает многими положительными свойствами. Это приближение широко используется в теории гидродинамической турбулентности. В магнитной гидродинамике оно разработано сравнительно недавно. Метод диффузионного приближения приведем только в той степени, в какой он нам потребуется, отсылая читателя за подробностями к обзорам [36, 37].

Вернемся прежде всего к проблеме замыкания теории турбулентности. При умножении уравнения движения на v и усреднении мы получаем уравнение для $\langle v_i v_j \rangle$ — второго момента, т. е. для корреляционного тензора, в которое входит третий момент $\langle v_i v_j v_f \rangle$. При умножении уравнения движения на $v_j v_f$ и усреднении получаем уравнение для третьего момента, но в которое входит четвертый момент. Так можно продолжать дальше, и мы всегда будем получать уравнение для n -го момента, в которое входит $(n + 1)$ -й момент. Эта бесконечная цепочка уравнений не может быть, вообще говоря, разорвана по какому-либо малому параметру. В символической форме фурье-образ нашей цепочки выглядит так:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + 2\chi k^2) \langle vv \rangle &= \langle vvv \rangle, \\ [\partial/\partial t + \chi(k^2 + p^2 + q^2)] \langle vvv \rangle &= \langle vv \rangle \langle vv \rangle + \langle vvvv \rangle_c. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь выписано только два уравнения системы. Индекс c обозначает семиинвариант поля скорости. Выпишем его конкретно для семиинварианта системы (4.9):

$$\begin{aligned} \langle v_i v_j v_f v_m \rangle_c &= \langle v_i v_j v_f v_m \rangle - \langle v_i v_j \rangle \langle v_f v_m \rangle - \langle v_i v_j \rangle \langle v_f v_m \rangle - \\ &- \langle v_i v_m \rangle \langle v_j v_f \rangle. \end{aligned}$$

Первой гипотезой, замыкающей систему (4.9), была гипотеза Миллионщикова об обращении семиинварианта, выписанного в (4.9), в нуль. Гипотеза применима при небольших числах Рейнольдса R .

Как показал Орсаг [44], неприменимость гипотезы Миллионщикова при $R \gg 1$ связана с тем, что при $\chi \rightarrow 0$ уравнения инвариантны относительно обращения времени $t \rightarrow -t$. Время памяти $(\chi k^2)^{-1}$ оказывается слишком большим. Орсаг ввел релаксационный коэффициент трения во втором уравнении (4.9), который можно трактовать как дополнительную вязкость. Это дает необратимость системе при $\chi \rightarrow 0$ и уменьшение времени памяти. Вместо $\chi(k^2 + p^2 + q^2)$ в левой части второго уравнения (4.9) следует писать

$$\chi(k^2 + p^2 + q^2) + \eta(k, t) + \eta(p, t) + \eta(q, t) = \mu(k, t) + \mu(p, t) + \mu(q, t), \quad \mu(k, t) = \chi k^2 + \eta(k, t),$$

что эквивалентно замене семиинварианта с помощью соотношения

$$\langle vvvv \rangle_c = - [\eta(k, t) \div \eta(p, t) + \eta(q, t)] \langle vvv \rangle.$$

Теперь второе уравнение системы (4.9) решается. Полагаем μ (а значит, и η) не зависящим от времени. Тогда решение второго уравнения (4.9) можно записать с помощью функции Грина однородного уравнения (куда входит лишь $\langle vvv \rangle$): $G(k, p, q, t) = \exp[-\mu(k, p, q)t]$, $\mu(k, p, q) = \mu(k) + \mu(p) + \mu(q)$. Кроме того, при решении этого уравнения следует (в данном приближении) считать, что зависимость от времени входит только в функцию Грина, т. е. что $\langle vv \rangle \langle vv \rangle$ не зависит от времени. Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle vvv \rangle &= \Theta(k, p, q, t) \langle vv \rangle \langle vv \rangle, \\ \Theta(k, p, q, t) &= \mu^{-1}(k, p, q) \{1 - \exp[-\mu(k, p, q)t]\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Величина μ^{-1} и есть время памяти системы. Выражение для третьего момента $\langle vvv \rangle$ следует подставить в первое уравнение системы (4.9). Полученное уравнение для корреляционного тензора $\langle vv \rangle$ содержит неизвестную, вообще говоря, функцию Θ , которая выражается через корреляционную функцию. Каким именно образом и какие получаются уравнения, ответы на эти вопросы будут даны в следующем подразделе.

Зависимость функции Θ от времени соответствует марковскому процессу. Если учитывать зависимость $\langle vv \rangle \langle vv \rangle$ от времени во втором уравнении системы (4.9), то выражение для $\langle vvv \rangle$ будет уже интегральным, и мы придем к приближению прямого взаимодействия Крейкнана. Система выходит на стационарное решение при $t \gg \mu^{-1}$ и $\Theta = \mu^{-1}$. Стационарные уравнения эквивалентны приближению случайных фаз Эдвардса [84]. Если $\Theta(k, p, q) = [\mu(p) + \mu(q)]^{-1}$, то получается приближение самосогласованного поля [85]. Интересно отметить, что изложенный метод использован в [86] для замыкания цепочки уравнений Боголюбова, в которой уравнения для N -частичной функции распределения выражаются через $(N + 1)$ -частичную функцию распределения.

Далее используем решение для Θ в виде (4.10), это соответствует приближению Орсага [44]. Получаемые уравнения обладают многими положительными свойствами. Прежде всего они дают колмогоровский спектр $k^{-5/3}$ и колмогоровскую константу в превосходном согласии с экспериментальными данными. В двумерном случае получается спектр k^{-3} (см. (2.11)). Эти уравнения также с успехом использовались для описания выхода турбулентности на режим статистического равновесия (при $\chi = 0$ и замкнутого фазового объема). Проводились также многочисленные тестовые проверки этих уравнений либо с помощью модельных уравнений, решение которых можно легко получить аналитически, и это решение сравнивалось с приближением Орсага, либо с помощью численных решений [80]. Физическая реализуемость этого приближения (т. е. положительность всех спектров в процессе эволюции) обеспечена существованием точной стохастической модели, при-

водящей к такому виду уравнений для корреляционных функций (см. [87]).

Сформулируем приближение Орсга для турбулентности, в которой можно выделить среднюю крупномасштабную составляющую поля. Выпишем цепочку уравнений типа (4.9), только теперь необходимо начинать с уравнения для первого момента:

$$(\partial/\partial t + \chi k^2) \langle v \rangle = \langle vv \rangle + \langle v \rangle \langle v \rangle, \quad (4.11)$$

$$(\partial/\partial t + 2\chi k^2) \langle vv \rangle = V \langle vv \rangle + \langle vvv \rangle_c, \quad \langle v \rangle = V.$$

В данном случае семиинвариант $\langle vvv \rangle_c$ не обращается в нуль, как это было для турбулентности без средних полей. Выпишем его выражение: $\langle v_i v_j v_f \rangle_c = \langle v_i v_j v_f \rangle - V_i \langle v_j v_f \rangle - V_j \langle v_i v_f \rangle - V_f \langle v_i v_j \rangle$. Введем релаксацию во второе уравнение системы (4.11), т. е. заменим χk^2 на $\chi k^2 + \eta(k) = \mu(k)$ или, что то же самое, полагаем $\langle vvv \rangle_c = -\eta(k) \langle vv \rangle$. Теперь система (4.11) оказывается замкнутой и может быть решена. Здесь, однако, постановка задачи несколько отличается от той, которая использовалась при выписывании системы (4.9). Дело в том, что в данном случае нас уже не интересует детальная структура турбулентности, она может считаться заданной. Нас интересует динамика крупномасштабных полей (масштаб которых L много больше l — внешнего масштаба пульсации). Крупномасштабные поля возмущают основные пульсации. Это возмущение мало, если

$$V \ll \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \quad (4.12)$$

что мы и предполагаем. Теперь корреляционный тензор можно записать в виде $\langle vv \rangle = \langle vv \rangle^0 + \langle vv \rangle'$, где $\langle vv \rangle^0$ соответствует стационарной турбулентности без крупномасштабного поля, $\langle vv \rangle'$ — возмущение, наложенное крупномасштабным полем, причем выполняется $\langle vv \rangle' \ll \langle vv \rangle^0$. Тогда система (4.11) может быть переписана в виде

$$(\partial/\partial t + \chi k^2) V = \langle vv \rangle' + \langle v \rangle \langle v \rangle, \quad (4.13)$$

$$(\partial/\partial t + 2\chi k^2) \langle vv \rangle' = V \langle vv \rangle^0 - \eta(k) \langle vv \rangle'.$$

Крупномасштабное поле, как сказано, возмущает турбулентность, т. е. появляется возмущенный тензор $\langle vv \rangle'$. Обратная реакция возмущения на крупномасштабное поле V как раз и выписана в первом уравнении системы (4.13): в правой части стоит именно $\langle vv \rangle'$, а не $\langle vv \rangle^0$. Невозмущенная турбулентность не влияет на поле V . Объясним вид второго уравнения системы (4.13). В левой части член $(\partial/\partial t + 2\chi k^2) \langle vv \rangle^0$ компенсируется нелинейными членами $\langle vvv \rangle_c$ и внешними силами, поддерживающими турбулентность на стационарном уровне, и поэтому не выписан. Остался только $(\partial/\partial t + 2\chi k^2) \langle vv \rangle'$. В правой части в первом члене вкладом возмущенной составляющей можно пренебречь. Второй член представляет собой релаксацию возмущенной составляющей поля скорости.

Запись уравнений в виде (4.13) дает возможность несколько новой интерпретации гипотезы Орсага в применении к крупномасштабным полям. Здесь рассматривается стационарная турбулентность. Поэтому всякое возмущение, например возмущение корреляционного тензора $\langle vv \rangle$, должно релаксировать за время $\tau = \eta^{-1}$. Крупномасштабное поле V является источником возмущения. Оно приводит к тому, что поле скорости, первоначально однородное и изотропное, становится слабонеоднородным (зависимость от координат входит через $V(x)$) и слабонеизотропным (поскольку появляется избранное направление, параллельное V). Таким образом, второе уравнение системы (4.13) как раз и описывает рост возмущения за счет источника (первый член правой части) и релаксацию возмущения из-за турбулентного перемешивания, забывания (второй член правой части). В результате баланса этих двух факторов появляется стационарное возмущение $\langle vv \rangle'$, которое и дает реакцию на крупномасштабное поле (в первом уравнении системы (4.13)). Таким образом, система (4.13) эквивалентна τ -приближению в кинетике, где вместо столкновений, дающих забывание флюктуаций, имеем турбулентную релаксацию.

Другое отличие системы (4.13) от (4.9) заключается в том, что в (4.13) вязкость χ незначительна. Когда речь шла о мелкомасштабных полях, то вязкость нужно было учитывать в области достаточно больших волновых чисел. Здесь же частота χk^2 при $k = 2\pi/L$, характерном для крупномасштабных полей, чрезвычайно мала, и можно положить в системе (4.13) $\chi = 0$. Всю процедуру вывода (4.13) сформулируем в виде, отличающемся от изложенного. Прежде всего в поле скорости выделяется крупномасштабная составляющая $v = V + u$, $\langle v \rangle = V$. Затем уравнение движения усредняется почленно: первый момент $\langle v \rangle$ при этом выражается через $\langle uu \rangle$ и $\langle v \rangle \langle v \rangle$. Усредненное уравнение вычитается из уравнения движения. В результате получается уравнение для u . Тензор $\langle u_i u_j \rangle$ представляется в форме $\langle u_i u_j \rangle = \langle u_i u_j \rangle^0 + \langle u_i u_j \rangle'$. Здесь, как и выше, $\langle u_i u_j \rangle^0$ представляет собой корреляционный тензор поля скорости стационарной турбулентности без крупномасштабного поля, $\langle u_i u_j \rangle'$ — возмущение, вносимое крупномасштабным полем. Умножим уравнение для u_i на u_j и усредним — тогда получим уравнение для $\langle u_i u_j \rangle'$ (поскольку $\langle u_i u_j \rangle^0$ — стационарная величина). В это уравнение войдет третий момент $\langle u_i u_j u_l \rangle$. Приближение Орсага эквивалентно замене его на τ -релаксирующий член:

$$\langle u_i u_j u_l \rangle \rightarrow - \langle u_i u_j \rangle' / \tau (k)_l$$

Ниже, в подразд. 5,7, мы будем неоднократно использовать эту схему. Поэтому полезно проиллюстрировать ее на простом примере модельного уравнения

$$\partial v_i / \partial t + \partial_j v_i v_j = 0, \tag{4.14}$$

похожего на уравнение Навье — Стокса. Усредненное уравнение есть $\partial V_i / \partial t + \partial_j \langle u_i u_j \rangle + \partial_j V_i V_j = 0$. Выпишем уравнение для u :

$\partial u_i / \partial t + \partial_j (u_i V_j + u_j V_i) - \partial_j \langle u_i u_j \rangle = -\partial_j u_i u_j$. Умножим выписанное уравнение на u_j , а уравнение для u_j — на u_i , сложим два получившихся уравнения и усредним. Возникающий третий момент по u_i заменим на τ -релаксирующий член. Вычислим в этом модельном примере реакцию однородной и изотропной турбулентности на крупномасштабную турбулентность. При этом можно пользоваться следующими соотношениями, упрощающими вычисления: $\langle u_j \partial_j u_i \rangle^0 = 0$, $\langle u_j u_i \rangle^0 = 1/3 \delta_{ij} \langle u^2 \rangle^0$. Считаем движение несжимаемым, $\text{div } \mathbf{v} = 0$ (тогда, строго говоря, следует учитывать давление в (4.14), но мы не будем усложнять модельную задачу). Учитывая все сказанное выше, получим уравнение $\partial \langle u_i u_j \rangle' / \partial t + \langle u_j u_j \rangle^0 \partial_j V_i + \langle u_i u_j \rangle^0 \partial_j V_j = -\langle u_i u_j \rangle' \tau^{-1}$. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Время τ представляет время релаксации корреляции величин u_i и u_j в одной и той же точке. Если бы корреляция вычислялась в разных точках, то τ зависело бы от расстояния между точками, а в фурье-представлении — от k (как в (4.9), (4.10), $\tau = \mu^{-1}$). Здесь же такой зависимости нет, иначе говоря, $\tau = \text{const}$. Итак, в данном приближении в применении к крупномасштабным полям мы имеем в качестве свободного параметра не неизвестную функцию (как в (4.10) — функция μ), а неизвестную величину $\tau = \text{const}$. Порядок величины τ очевиден: это есть l/v для турбулентности. Время изменения крупномасштабных полей t_0 гораздо больше, чем $\tau \approx l/v$, поэтому целесообразно рассматривать уравнение для $\langle u_i u_j \rangle'$ при $\tau \ll t \ll t_0$. За это время крупномасштабное поле практически не изменится, но $\langle u_i u_j \rangle'$ выйдет на стационарный режим, т. е. $\langle u_i u_j \rangle' = -1/3 \tau \langle u^2 \rangle^0 (\partial_j V_i + \partial_i V_j)$. Отсюда непосредственно убеждаемся, что $|\langle u_i u_j \rangle'| \approx \langle u^2 \rangle^0 V v^{-1} L L^{-1}$. Видно, что $|\langle u_i u_j \rangle'| \ll \langle u^2 \rangle^0$. Для того чтобы убедиться в этом, следует воспользоваться неравенством (4.12) и тем, что $L \gg l$.

Подставляя выражение $\langle u_i u_j \rangle'$ в уравнение для V , получим $\partial V_i / \partial t + \partial_j V_i V_j = \chi_t \Delta V_i$, $\chi_t = 1/3 \tau \langle u^2 \rangle^0$. Итак, реакция однородной и изотропной турбулентности в рамках модельного уравнения (4.14) свелась к появлению турбулентной вязкости χ_t . Отметим, что при наличии крупномасштабных магнитных полей условию (4.12) соответствует предположение о слабом крупномасштабном поле, т. е. β' , определенное в (4.7), велико.

Изложим в заключение этого подраздела метод вычисления коэффициента турбулентной диффузии с помощью техники ренормализационной группы. Этот метод является одним из современных подходов в турбулентности. Он был подробно проанализирован в обзоре Крейкнана [88]. В подразд. 5 наст. главы мы сформулируем его для магнитной турбулентности.

Рассмотрим диффузию скалярной примеси. В этом методе вклад пульсации скорости с волновым вектором k , т. е. вклад v_k , в коэффициент диффузии вычисляется первоначально по теории возмущений. Необходимо, следовательно, вычислять коэффициент диффузии, исходя из (2.2) при больших коэффициентах D_θ (когда и можно пользоваться теорией возмущений). Усредним уравнение

(2.2) почленно. Вычисление $\langle v\theta \rangle$ проводится по теории возмущений. Представим v и θ в виде ряда Фурье $v = \sum_k v(k) \exp(ikx)$.

Тогда $\theta = \langle \theta \rangle + \tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(k) &= - \sum_q \int_0^t ik_j v_j(p) \langle \theta(q) \rangle \exp[-D_\theta k^2(t-t_1)] dt_1 = \\ &= - \sum_q ik_j v_j(p) \langle \theta(q) \rangle / D_\theta k^2, \end{aligned}$$

$p = k - q$. Мы воспользовались тем, что в данном случае величина D_θ считается большой, $D_\theta k^2$ много больше обратного времени корреляции $v(k)k$. Умножим это выражение на $v_i(k' - k)$, усредним и воспользуемся однородностью турбулентности: $4\pi \langle v_i(k) \times v_j(k') \rangle = \delta_{-i}^k \sigma_{ij}(k) \langle v^2(k) \rangle$, $\delta_a^b = 1$, если $a = b$ и $\delta_a^b = 0$, если $a \neq b$. Тогда получим $\langle v_i(k' - k) \tilde{\theta}(k) \rangle = - \langle v^2(k) \rangle (D_\theta k^2)^{-1} \times \times ik'_y (4\pi)^{-1} \langle \theta(k') \rangle \sigma_{ij}(k)$. Мы дополнительно воспользовались тем, что $k' \ll k$ (поскольку k' входит в крупномасштабное поле $\langle \theta(k') \rangle$), и просуммировали выражение по всем k с одинаковым модулем, равным k . Коэффициенту турбулентной диффузии соответствует здесь величина $D_T = \sum_k \langle v^2(k) \rangle / 3D_\theta k^2 = \sum_k \Delta D_T(k)$, где суммирование проводится по всем k .

В описываемом методе вклад каждого k в коэффициент диффузии ренормализуется, т. е. для каждого k коэффициент D_θ заменяется на $D_\theta + D_T(k)$, $D_T(k) = \sum_{q>k} \Delta D_T(q)$. Иными словами, на каждую фурье-амплитуду $\theta(k)$ действует не только молекулярная диффузия, но и турбулентная, обязанная своим происхождением всем флюктуациям скорости с волновыми векторами $q > k$ (т. е. «мелкомасштабным» по сравнению с пульсацией $\tilde{\theta}(k)$). Теперь можно записать $\Delta D_T(k) = \langle v^2(k) \rangle / 3k^2 [D_\theta + D(k)]$. Это уравнение (относительно $D(k)$) легко решается, если перевести его в дифференциальную форму по правилу (с граничным условием $D_T(\infty) = 0$) $\Delta D_T(k) \rightarrow -dD_T$, $\langle v^2(k) \rangle \rightarrow Edk$. В результате имеем

$$\begin{aligned} D_T(k) &= -D_\theta + \left[D_\theta^2 + \frac{2}{3} \int_k^\infty k_1^{-2} E(k_1) dk_1 \right]^{1/2} \approx \\ &\sim \left[\frac{2}{3} \int_k^\infty k_1^{-2} E(k_1) dk_1 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Полный коэффициент диффузии получится, если в этом выражении $k = 0$. Связывая изложенное выше с приближением Орсага, заметим, что μ , необходимое для выражения (4.10), можно считать равным $D_T(k)k^2$ и для крупномасштабных полей — положить в (4.13) $\eta = D_T(0)l^{-2}$.

4. Мелкомасштабные поля в диффузионном приближении

Схема Орсга (4.9), (4.10) обобщена на МГД-турбулентность в работах [80, 87]. Здесь не возникает каких-либо принципиальных затруднений. Но, конечно, магнитная гидродинамика имеет свою специфику, о которой мы скажем далее. Особенно подробно эта теория развита в работе [80]. Как отмечают авторы, стимулом для этой работы было указание на то, что в строящемся во Франции реакторе течение натриевого охладителя характеризуется магнитным числом Рейнольдса $R'_m \approx 45$ (в то время как $R = 10^7$).

Чего же можно ожидать от диффузионного приближения? Что оно добавит к написанному в подразд. 2, где изложено поведение мелкомасштабных полей? Прежде всего в подразд. 2 дана качественная картина. Схема Орсга дает возможность рассмотреть и процесс установления стационарного состояния, и само установившееся состояние на более высоком уровне строгости. Она учитывает также эффекты гиротропности, которые для упрощения не обсуждались в подразд. 2. Наконец, расчет по схеме Орсга дает возможность определить критическое магнитное число Рейнольдса, при котором начинается генерация магнитного поля.

В гидродинамической турбулентности (без магнитного поля) нелинейное взаимодействие сохраняет энергию $\rho \langle v^2 \rangle / 2$ и гиротропность $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ (см. гл. II, подразд. 3). В магнитной гидродинамике гиротропность не является инвариантом. В этом случае сохраняется полная энергия $\rho \langle v^2 \rangle / 2 + \langle H^2 \rangle / 8\pi = \text{const}$, гиротропность магнитного поля $\langle \mathbf{A} \mathbf{H} \rangle = \text{const}$, $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$, и кросс-гиротропность $\langle \mathbf{v} \mathbf{H} \rangle = \text{const}$. Уравнения, полученные в диффузионном приближении, обладают свойством сохранения этих трех величин. Кроме того, при переходе к двумерной турбулентности они показывают отсутствие динамо-эффекта, как это и должно быть.

Существенным моментом в теории является задание функции μ , которая войдет в выражение (4.10). Как говорилось в подразд. 3, μ^{-1} — время жизни пульсации. Более конкретно можно записать $\tau(k) = 1/\eta(k)$, $\mu(k) = \chi k^2 + \eta(k)$, где функция $\tau(k)$ для колмогоровской турбулентности есть $(v_k k)^{-1}$ (см. гл. II, подразд. 2). Этого все-таки недостаточно для определения μ . Все, что известно о τ (с помощью которого определяется μ), — это оценка времени жизни пульсации с волновым вектором k по порядку величины. Функция μ определяет, как это видно из (4.10), функцию Θ . Для МГД-турбулентности будем иметь два взаимодействия: нелинейное, которое имело бы место без магнитного поля, и взаимодействие, обусловленное наличием магнитного поля. Для каждого из этих взаимодействий есть свое характерное время и своя функция μ . В работе [80] время принято одинаковым (с точностью до вязких членов). Выпишем эти выражения ($\mu(k, p, q) = \mu(k) + \mu(p) + \mu(q)$):

$$\begin{aligned} \mu^V(k) &= \chi k^2 + C_s \left\{ \int_0^k q^2 [E(q) + E_H(q)]^{1/2} dq \right\}^{1/2} + \\ &+ 3^{-1/2} k \left[\int_0^k E_H(q) dq \right]^{1/2}, \quad (4.15) \\ \mu^{VM}(k) &= \mu^V(k) + Dk^2. \end{aligned}$$

Здесь μ^V и μ^{VM} входят в качестве обратных времен релаксации в разные уравнения. Мы видим из (4.15), что в задачу входят два времени, на что указывалось выше. Выражение для Θ^V совпадает с (4.10) с заменой μ на μ^V , выражение для Θ^{VM} — тоже с заменой μ на μ^{VM} . При $\chi \rightarrow 0$ и $D \rightarrow 0$ эти времена совпадают. Обсудим смысл выписанных членов в выражении для μ в (4.15). При отсутствии магнитного поля остается лишь второй член (первый член описывает вязкое взаимодействие, и мы его не рассматриваем). Для спектра турбулентности, быстро падающего при $k > 2\pi/l$, этот член оценивается как v/l . Это есть обратное время деформации мелкомасштабных (с $k \gg 2\pi/l$) неоднородностей пульсациями скорости масштаба l . Если же спектр турбулентности медленно падает или растет в области $2\pi/l < g < k$, то второй член оценивается как $(v_k k)^{-1}$. Константа C_s выбрана так, чтобы давать константу Колмогорова (равную 1,4) в отсутствие магнитных флуктуаций, $C_s = 0,26$. Во втором члене правой части (4.15) содержится также $E_H(q)$. Это соответствует времени взаимодействия, получаемому из обратного предельного случая $E(q) = 0$. При этом время взаимодействия следует из оценки (4.1). Ясно, что из этого выражения следует характерное время $(4\pi r)^{1/2}/kH_k$. Обратное время может быть выписано в виде $\left[\int_0^k q^2 E_H(q) dq \right]^{1/2}$, как в (4.15).

Существенно новым является третий член правой части (4.15), который и придает специфику МГД-турбулентности. Он соответствует новой характерной частоте задачи $v_A k$, где v_A определяется квазиоднородным полем H_0 пульсации масштаба l , а также соответствует времени памяти — времени пребывания волнового пакета в области размером $2\pi/k$, за которое флуктуации размером $2\pi/k$ уйдут из рассматриваемой области пространства (двигаясь с альфвеновской скоростью), и в этой области система забудет о них за время $(v_A k)^{-1}$.

Выпишем уравнения, полученные в работе [80]:

$$(\partial/\partial t + 2\chi k^2) E = 2B^V + A^V E + 2\tilde{A}^V \tilde{E}, \quad (4.16)$$

$$(\partial/\partial t + 2\chi k^2) \tilde{E} = \tilde{B}^V - \frac{1}{2} k^2 \tilde{A}^V E + \tilde{A}^V \tilde{E}^*, \quad (4.17)$$

$$(\partial/\partial t + 2Dk^2) E_H = 2B^M + A^M E_H + 2k^2 \tilde{A}^M \tilde{E}_H, \quad (4.18)$$

$$(\partial/\partial t + 2Dk^2) \tilde{E}_H = \tilde{B}^M + \frac{1}{2} \tilde{A}^M E_H + A^M \tilde{E}_H. \quad (4.19)$$

Символ **Тильда** обозначает псевдоскалярную величину. Здесь E, E_H , как и прежде, спектры мощности пульсаций скорости и магнитного поля. В уравнениях фигурируют псевдоскалярные величины: спектр гиротропности поля скорости $1/2 \langle v \text{ rot } v \rangle = \int_0^\infty \tilde{E}(k) dk$ и спектр гиротропности магнитного поля $\langle \mathbf{A}\mathbf{H} \rangle / 8\pi\rho = \int_0^\infty \tilde{E}_H(k) dk$. Спектр скорости и магнитного поля нормирован (как и во всей книге) несколько иначе, чем в [80]: $\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty E(k) dk$, $\langle H^2 \rangle = \int_0^\infty E_H(k) dk$. Поэтому коэффициенты системы (4.16)—(4.19) (и в нижеследующих выражениях) несколько отличаются от коэффициентов в [80].

Выпишем выражения, входящие в правые части (4.16)—(4.19):

$$\begin{aligned}
 B^V &= k^3 \int_{\Delta_k} \{ \Theta^V [1/4 b E(p) E(q) - c p^{-2} \tilde{E}(p) \tilde{E}(q)] + \\
 &+ \Theta^{VM} c [1/4 E_H(p) E_H(q) - q^2 \tilde{E}_H(p) \tilde{E}_H(q)] \} (pq)^{-1} dp dq, \\
 2\bar{B}^V &= k^3 \int_{\Delta_k} \{ \Theta^V [b \tilde{E}(p) E(q) - c E(p) \tilde{E}(q)] + \\
 &+ \Theta^{VM} f k p \tilde{E}_H(p) E_H(q) \} (pq)^{-1} dp dq, \\
 B^M &= k^3 \int_{\Delta_k} \Theta^{VM} \{ c k^2 p^{-2} 1/4 E(p) E_H(q) + h [1/4 E_H(p) E(q) + \\
 &+ q^2 p^{-2} \tilde{E}(p) \tilde{E}_H(q)] \} (pq)^{-1} dp dq, \\
 2\bar{B}^M &= k^3 \int_{\Delta_k} \Theta^{VM} h [\tilde{E}_H(p) E(q) + p^{-2} \tilde{E}(p) E_H(q)] (pq)^{-1} dp dq, \\
 2A^V &= -k \int_{\Delta_k} [\Theta^V b p^2 E(q) + \Theta^{VM} c p^2 E_H(q)] (pq)^{-1} dp dq, \\
 \bar{A}^V &= k \int_{\Delta_k} \Theta^V c \tilde{E}(q) (pq)^{-1} dp dq, \\
 2A^M &= -k \int_{\Delta_k} \Theta^{VM} [h p^2 E(q) + c k^2 E_H(q)] (pq)^{-1} dp dq, \\
 \bar{A}^M &= k^{-1} \int_{\Delta_k} \Theta^{VM} [e p^3 q \tilde{E}_H(q) - h p^2 \tilde{E}(q)] (pq)^{-1} dp dq.
 \end{aligned}$$

Разъясним используемые обозначения. Знак \int_{Δ_k} означает интегрирование в плоскости векторов \mathbf{p}, \mathbf{k} , причем такое, что векторы $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ составляют треугольник. В сущности все эти нелинейные члены по структуре аналогичны правой части (3.70), где интегрирование проводится по всему трехмерному пространству \mathbf{q} , но

в (3.70) входят также векторы \mathbf{k} , \mathbf{p} , связанные с \mathbf{q} соотношением $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ (формирующим для векторов \mathbf{p} , \mathbf{k} , \mathbf{q} треугольник). Интегрирование по Δ_k соответствует замене переменных в (3.70). Скалярным произведениям уравнения (3.70) в выписанных выражениях соответствуют так называемые геометрические коэффициенты (введенные Крейкнаном) b , c , e , f , h — все функции от k , p , q

$$b = pk^{-1}(xy + z^3), \quad c = pk^{-1}z(1 - y^2), \\ e = x(1 - z^2), \quad f = z - xy - 2zy^2, \quad h = 1 - y^2,$$

где x , y , z — косинусы углов, лежащих против сторон \mathbf{k} , \mathbf{p} , \mathbf{q} нашего треугольника, т. е. $x = -\mathbf{p}\mathbf{q}/pq$, $y = \mathbf{k}\mathbf{q}/kq$, $z = \mathbf{k}\mathbf{p}/kp$. Величины Θ^{VM} , Θ^V — функции от k , p , q .

Перейдем к анализу полученных уравнений и следующих из них результатов, полученных при численном интегрировании этих уравнений. Прежде всего при отсутствии магнитного поля ($E_H = 0$, $\tilde{E}_H = 0$) и гиротропности ($\tilde{E} = 0$) остается только одно уравнение (4.16), в котором $\tilde{A} = 0$. В этом случае турбулентность становится чисто гидродинамической и (4.16) сводится к известному уравнению для спектральной функции поля скорости. Посмотрим, как решается проблема мелкомасштабного динамо в рассматриваемом приближении. Надо считать при этом $\tilde{E} = 0$, $\tilde{E}_H = 0$ и $\tilde{E} \gg E_H$. Нас в этом случае интересует уравнение (4.18), причем во втором члене правой части в выражении для A^M следует пренебречь вкладом \tilde{E}_H , дающим квадратичный по E_H член в (4.18). В результате мы возвращаемся к уравнению (3.70) с заменой $4\pi p^2 u(p) \rightarrow E(p)\Theta^{VM}(k, p, q)$. Кинетическая энергия поддерживается на стационарном уровне внешними источниками. Следовательно, задача становится линейной. Уравнение (4.18) в рассматриваемом приближении решалось численно, было получено растущее решение (динамо-решение) при R'_m больше критического, равного 29. Итак, возбуждение магнитных полей в данной схеме имеет место при $R'_m > 29$. При этом, как и следовало ожидать, обычное число Рейнольдса весьма слабо влияет на критическое магнитное число Рейнольдса, что соответствует изложенному в гл. III, подразд. 1: обычная вязкость не влияет на генерацию поля.

Относительно полученного результата о генерации поля отметим следующее. Как говорилось в гл. III, подразд. 1, проблема мелкомасштабного динамо *должна решаться в точном виде*. В этом состоит специфика данной задачи, никакое приближение не способно дать ответ на принципиальный вопрос, есть или нет турбулентное динамо (см. [8], а также гл. III, подразд. 13). Поэтому, если бы не было строгого подхода, изложенного в гл. III, результаты работы [80], касающиеся турбулентного динамо, можно было бы рассматривать как (еще один) довод в пользу того, что турбулентное динамо имеет место. Другие доводы были даны в [1]. Поэтому можно сказать так: полученный в [80] результат о тур-

булентном динамо дает еще один довод в пользу приближения Орсага и его применимости в магнитной гидродинамике.

С другой стороны, в гл. III мы рассматривали предельно большие числа R'_m , но критическое значение R'_m нами не получено. В этом отношении изложенная приближенная схема обладает преимуществом: она дает критическое значение R'_m . В связи с этим надо сказать, что критическое R'_m не играет большой роли в космических условиях ввиду того, что там величина R'_m чудовищно велика и заведомо на много порядков превышает критическую. Вопрос о критическом R'_m остро стоит в теории геодинамо — там это вопрос энергетики, поскольку большие R'_m соответствуют большой интенсивности движений. Не менее существенно определение критического R'_m в технических установках, где очень трудно достигнуть больших значений величины R'_m .

Итак, при достаточно большом числе R'_m магнитные флюктуации генерируются. Дальнейшая их эволюция согласно расчетам, качественно соответствует тому, что сказано в подразд. 2. Если в систему инжектируется гиротропность поля скорости, то критическое R'_m уменьшается. Дело в том, что генерация крупномасштабного поля возможна даже при $R'_m < 1$ при наличии гиротропности. В конце концов устанавливается стационарное состояние со спектром Крэйкнана $k^{-3/2}$, описанное в подразд. 2. Если в астрофизических условиях турбулентное динамо и установление равномерного распределения служат для объяснения существующих полей, то в натриевых охладителях возбудившиеся магнитные поля приведут к различным отрицательным следствиям. В частности, тепловые потоки уменьшатся, что связано со снижением теплопроводности из-за наличия магнитного поля. Поля здесь играют такую же (отрицательную) роль, как в лазерных каплях [89].

5. Крупномасштабные поля в однородной турбулентной среде

В данном подразделе и далее в подразд. 7 будет построена макроскопическая магнитная гидродинамика. Выясним прежде всего необходимость рассмотрения нелинейного случая при анализе крупномасштабного магнитного поля \mathbf{V} . Во второй главе уравнение для \mathbf{V} получено на основании точного решения (1.14). Это уравнение и в нелинейном случае остается таким же, и решение (2.51), безусловно, справедливо. Отсюда, казалось бы, можно сделать вывод, что нелинейность не сказывается на динамике поля \mathbf{V} . Это, однако, не так. Поле скорости не может уже быть заданным в нелинейной задаче, и вся методика гл. II, подразд. 6, касающаяся вывода выражения для \mathbf{V} , уже некорректна. Формально это видно из того, что в нелинейной задаче невозможно записать выражение (2.52), основанное на статистической независимости

начального магнитного поля при $t = t_0$ от поля скорости при $t \geq t_0$. В нелинейной задаче использование статистической независимости окажется незаконным: поле скорости при $t \geq t^0$ чувствует магнитное поле через уравнение движения с учетом электромагнитной силы. Конечно, можно было бы задать начальное магнитное поле чисто крупномасштабным, такую начальную задачу можно рассмотреть. Но полученное выражение при $t \gg \tau$ не выйдет на универсальный режим. Дело в том, что за время τ на фоне поле \mathbf{V} возникнут магнитные неоднородности масштаба l (и меньше) и универсальный режим представит собой поле \mathbf{V} плюс мелкомасштабные поля.

Задачи, которые стоят в макроскопической магнитной гидродинамике, сформулированы в подразд. 1. Если говорить только о динамике поля \mathbf{V} , то здесь имеются два аспекта:

1) взаимодействие \mathbf{V} с магнитными флюктуациями, напряженность которых не мала;

2) нелинейная стабилизация поля \mathbf{V} (самовоздействие и взаимодействие с флюктуациями).

В этом подразделе мы осветим оба эти аспекта для случая однородной турбулентности. Пользуемся тем, что энергия магнитных флюктуаций близка к энергии кинетических. Кроме того, рассмотрим случай слабого поля, $\beta' \gg 1$ (β' определено в (4.7)), и малой крупномасштабной скорости (согласно (4.12)). При этом (см. подразд. 2) крупномасштабное поле практически не влияет на перенос энергии в инерционной области и турбулентность может быть задана. С другой стороны, как показано в конце подразд. 3, и поле крупномасштабной скорости \mathbf{V} слабо влияет на турбулентность. И то и другое крупномасштабное поле слабо возмущает турбулентность, обратная реакция этого возмущения на крупномасштабное поле и дает искомые эффекты (турбулентную диффузию, генерацию и т. д.). Предполагаем несжимаемость поля скорости, $\operatorname{div} v = 0$. Это предположение обосновано, если число Маха $M = v/s \ll 1$. В качестве примера приведем конвективную зону Солнца, где среднеквадратичные скорости на два порядка меньше скорости звука.

Вывод основных уравнений магнитной гидродинамики средних полей. Действуем по схеме, изложенной в подразд. 3. Исходим из уравнений идеальной МГД ((1.24) при $\chi = 0$ и (1.14)). Непосредственное усреднение приводит их к следующему виду:

$$\begin{aligned} \partial V_i / \partial t + \partial_j V_i V_j + \partial_j \langle u_i u_j \rangle &= -(1/\rho) \partial_i \langle \rho \rangle + (1/\rho) \partial_j \cdot \\ &\cdot [\pi_{ij}(\mathbf{B}) + \langle \pi_{ij}(\mathbf{h}) \rangle], \\ \partial \mathbf{B} / \partial t &= \operatorname{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}] + \operatorname{rot} \langle [\mathbf{u} \mathbf{h}] \rangle. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{h}$, $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{B}$, $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$, $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{V}$,

$$\pi_{ij}(\mathbf{F}) = (4\pi)^{-1} ({}^1/2 F^2 \delta_{ij} - F_i F_j),$$

$\pi_{ij}(\mathbf{H})$ — максвелловский тензор напряжений, $\langle u_i u_j \rangle$ — турбулентный тензор напряжений. Нам потребуется определенная ин-

Формация о невозмущенной турбулентности (как мы видели в подразд. 3, некоторые параметры именно невозмущенной турбулентности входят в окончательный ответ):

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle^0 &= 1/3 \delta_{ij} \langle u^2 \rangle^0, & \langle u_i \partial_j u_j \rangle^0 &= 1/6 \langle u \operatorname{rot} u \rangle^0 \varepsilon_{ijj}, \\ \langle h_i h_j \rangle^0 &= 1/3 \delta_{ij} \langle h^2 \rangle^0, & \langle h_i \partial_j h_j \rangle^0 &= 1/6 \langle h \operatorname{rot} h \rangle^0 \varepsilon_{ijj}, \\ \langle u_i h_j \rangle^0 &= 0, & \langle u_i \partial_j h_j \rangle^0 &= \langle h_j \partial_j u_i \rangle^0 = 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения есть следствие изотропии, однородности турбулентности. Последние два соотношения требуют дополнительного разъяснения. Обратимся к $\langle u_i h_j \rangle^0 = 0$. Выпишем общий вид псевдотензора $\langle u_i h_j \rangle^0 = A \varepsilon_{ijj} + B \delta_{ij}$ (A — скаляр, B — псевдоскаляр). Составим вектор $\langle [v h] \rangle^0$. Очевидно, что он равен нулю, поскольку основная турбулентность не содержит избранного вектора. Следовательно, $A = 0$. Составим теперь псевдоскаляр $\langle u h \rangle^0 = B$. Псевдоскалярные величины типа $\langle u \operatorname{rot} u \rangle^0$, $\langle h \operatorname{rot} h \rangle^0$ присутствуют в нашей задаче. Может ли быть псевдоскаляр $\langle u h \rangle^0$ пропорционален им? Оказывается, нет. Дело в том, что уравнения МГД инвариантны относительно преобразования $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$, и все физические величины должны обладать таким свойством. Псевдоскаляры $\langle u \operatorname{rot} u \rangle^0$ и $\langle h \operatorname{rot} h \rangle^0$ обладают им, а $\langle u h \rangle^0$ — нет. Поэтому $B = 0$, откуда следует $\langle u_i h_j \rangle^0 = 0$. Заметим дополнительно, что $\langle u h \rangle^0$ есть, как отмечалось в подразд. 4, один из инвариантов уравнений МГД. Поэтому если искусственно ввести эту корреляцию в турбулентность, то она не будет уничтожаться нелинейными взаимодействиями. Но конечная диссипация в системе в конце концов приведет к исчезновению этой корреляции.

Псевдотензор $\langle u_i \partial_j h_j \rangle^0$ может быть представлен единственным образом] $\langle u_i \partial_j h_j \rangle^0 = A' \varepsilon_{ijj}$, причем скаляр $\langle u \operatorname{rot} h \rangle^0$ не может присутствовать в задаче, будучи неинвариантным относительно преобразования $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$. Итак, $A' = 0$ и $\langle u_i \partial_j h_j \rangle^0 = 0$.

Наша задача состоит в вычислении поправок $\langle u_i u_j \rangle'$, $\langle h_i h_j \rangle'$, $\langle u_i h_j \rangle'$, которые неізотропны и зависят от координат через крупномасштабные поля. Последняя из них уже не исчезает и, собственно говоря, не представляет собой поправку, поскольку $\langle u_i h_j \rangle^0 = 0$. Вычисления, изложенные в подразд. 3, не представляют принципиальных затруднений. Единственная трудность заключается в вычислении вклада давления. Поскольку рассматривается несжимаемая жидкость, давление должно компенсировать потенциальную составляющую нелинейных членов уравнения движения. Для того чтобы не иметь дело с оператором, обратным оператору Лапласа, удобно пользоваться фурье-представлением уравнения движения

$$1/2 \partial v_i(\mathbf{k}) / \partial t + i \sigma_{ij}(\mathbf{k}) k_a \int v_a(\mathbf{p}) v_j(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + 1/\rho i \sigma_{ij}(\mathbf{k}) k_a \pi_{aj}(\mathbf{k}) = 0,$$

$\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ (тензор σ_{ij} определен в (3.70)), $\pi_{aj}(\mathbf{k})$ — фурье-образ тензора $\pi_{aj}(\mathbf{H})$. Здесь давление уже исключено и условие несжимаемости выполняется автоматически. Кроме того, необходимо

выделить средние составляющие $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{V}(\mathbf{k}) + \mathbf{u}(\mathbf{k})$, $\mathbf{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{B}(\mathbf{k}) + \mathbf{h}(\mathbf{k})$, $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{V}$, $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{B}$. Задача теперь состоит в вычислении фурье-образа поправок к корреляционным тензорам. Мы проиллюстрируем вычисления на примере поправки:

$$\begin{aligned} \langle u_i n_j \rangle' &= \int \langle \tilde{u}_i(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) u_j(\mathbf{k}) \rangle' \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{k}) d\mathbf{k} d\boldsymbol{\kappa}, \\ \tau^{-1} \langle u_j(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) u_i(\mathbf{k}) \rangle' &= -ik_m 2\sigma_{if}(\mathbf{k}) \int [V_f(p) \langle u_j(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) u_m(\mathbf{q}) \rangle^0 + \\ &+ V_m(\mathbf{q}) \langle u_j(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) u_f(p) \rangle^0] d\mathbf{q} - i(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k})_m 2\sigma_{jf}(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) \times \\ &\times \int [V_f(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle u_i(\mathbf{k}) u_m(\mathbf{q}) \rangle^0 + \\ &+ V_m(\mathbf{q}) \langle u_f(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle^0] d\mathbf{q}, \\ \langle u_i(\mathbf{k}) u_j(\mathbf{k}') \rangle^0 &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') u(k) 2\sigma_{ij}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Выпишем результат:

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle' &= -\frac{2}{15\tau} \langle u^2 \rangle^0 (\partial_i V_j + \partial_j V_i), \\ \langle h_i h_j \rangle' &= \frac{1}{3\tau} \langle h^2 \rangle^0 (\partial_i V_j + \partial_j V_i), \\ \langle u_i h_j \rangle' &= \frac{1}{15\tau} \frac{1}{4\pi\rho} \langle h^2 \rangle^0 (\partial_i B_j + \partial_j B_i) - \\ &- \frac{1}{3\tau} \langle u^2 \rangle^0 \partial_i B_j + \frac{1}{2}(\alpha + \beta_1) \varepsilon_{ijf} B_f, \\ \alpha &= -\frac{1}{3\tau} \langle \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u} \rangle^0, \quad \beta_1 = \frac{1}{3\tau} \frac{1}{4\pi\rho} \langle \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} \rangle^0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Интересно отметить, что давление влияет на коэффициенты в системе (4.20). В модельном примере (см. подразд. 3) коэффициент при тензоре $\partial_f V_i + \partial_i V_f$ был $-\tau \langle u^2 \rangle^0 / 3$, в то время как в соответствующем месте системы (4.20) стоит $-\frac{2}{15\tau} \langle u^2 \rangle^0$.

Выпишем усредненные уравнения, полученные в работе [90]:

$$\begin{aligned} \partial V_i / \partial t + \partial_j V_i V_j + (1/4\pi\rho) \partial_j \pi_{ij}(\mathbf{B}) + (1/\rho) \nabla p &= \chi_T \Delta V_i, \\ \partial \mathbf{B} / \partial t - \operatorname{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}] &= D_T \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot} (\alpha + \beta_1) \mathbf{B}, \\ D_T &= \frac{1}{3\tau} \langle u^2 \rangle^0, \quad \chi_T = \frac{1}{3\tau} [\frac{2}{5} \langle u^2 \rangle^0 + (1/4\pi\rho) \langle h^2 \rangle^0]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В правой части системы (4.21) стоят члены, возникающие из-за обратного действия турбулентности на крупномасштабные поля. Давление фигурирует в уравнении движения (оно компенсирует потенциальную составляющую нелинейных крупномасштабных сил).

Вся линейная теория динамо входит в (4.21) в виде α -эффекта (член $\operatorname{rot} \alpha \mathbf{B}$) и в коэффициент диффузии D_T второго уравнения системы (4.21). Перейдем к анализу нелинейности в этой системе, возникшей из-за действия турбулентности. Мы видим, что турбулентность приводит к турбулентной вязкости χ_T , в которую дают вклад также и пульсационные магнитные поля. Турбулентные коэффициенты D_T и χ_T много больше (в R_m и R раз соответственно) молекулярных коэффициентов D и χ , что и обосновывает отбрасывание последних и работу с уравнениями идеальной МГД.

Наиболее интересным с точки зрения теории динамо нелинейным эффектом является β -эффект (член $\beta_1 \operatorname{rot} \mathbf{B}$ во втором уравне-

нии системы (4.21)). Упомянутый β -эффект был обнаружен авторами работы [87]. Из второго уравнения системы следует, что β -эффект может сам по себе вызвать генерацию магнитного поля, если даже $\alpha = 0$. В реальных условиях, однако, гиротропность магнитного поля не возбуждается внешними источниками в отличие от обычной гиротропности, которая генерируется кориолисовой силой (см. гл. II, подразд. 3). Поэтому для приложений представляет интерес рассмотреть ситуацию, когда гиротропность магнитного поля возникает (если она действительно возникает) самосогласованным образом. Иначе говоря, система (4.21) не является замкнутой: величина β_1 неизвестна. В подразд. 6 мы выведем уравнение для β_1 , которое и замкнет систему.

Полученная система уравнений (4.21) описывает *главные нелинейные* эффекты для крупномасштабных полей. Обычно в расчетах магнитных полей используют второе уравнение системы, но β -эффект не был, насколько нам известно, до сих пор включен в прикладные расчеты. Между тем, как мы увидим (см. подразд. 6), этот эффект сравним с α -эффектом и должен приниматься во внимание. Что касается первого уравнения системы, то оно неоднократно привлекалось для расчета течений в конвективных зонах Солнца и звезд. Для того чтобы получить из него дифференциальное вращение, необходимо учесть добавочно кориолисову силу в уравнении (1.24). Тогда в первом уравнении системы (4.21) наряду с турбулентной (вообще говоря, анизотропной) вязкостью возникает сила, пропорциональная $\partial_i \Omega_j$ (Ω — угловая скорость, она-то и генерирует дифференциальное вращение (см. гл. II, подразд. 9)). Роль магнитных флюктуаций в этих расчетах не учитывалась.

Вернемся к обсуждению диффузионного приближения, положенного в основу вывода системы (4.21). Как отмечалось в подразд. 3, получаемые уравнения имеют свободные параметры. При расчете крупномасштабных полей свободным параметром является не функция Θ , а величина $\tau = \text{const}$. В приближении слабых крупномасштабных полей τ в выражениях (4.20) следует считать равной $\tau = l \langle u^2 \rangle^{-1/2}$. Конечно, такое выражение для τ не может претендовать на точность. Можно только утверждать, что для той степени точности, с которой мы имеем дело в астрофизике, такая оценка для τ достаточна.

Между тем имеется возможность получить уравнение для τ , и тем самым τ уже не будет свободным параметром теории. Для этого можно поступить следующим образом. Цепочку уравнений для моментов (4.11) следует замкнуть с помощью гипотезы Орсага не на втором шаге, как в (4.13), а на третьем, т. е. выписать уравнение для третьего момента и семиинвариант в нем заменить на τ -релаксирующий член. В результате мы опять придем к выражениям (4.20), но вместо τ будет стоять некоторая интегральная характеристика спектра, функционально связанная с τ , введенным на третьем шаге. Приравнявая это выражение величине τ , мы получим уравнение на τ . Такой расчет не проводился для крупномасштабных магнитных полей. Схема расчета была пред-

ложена и осуществлена в работе [91]. В последней речь идет о расчете усредненной (по магнитным флюктуациям) функции распределения заряженных частиц, удовлетворяющей кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_j \partial_j f + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Эта задача связана с расчетом изотропизации и ускорения частиц высокой энергии (космических лучей) межпланетными магнитными неоднородностями (солнечного ветра и межзвездной среды Галактики). При этом удается получить не только усредненное уравнение со свободным параметром τ (временем рассеяния), но и замкнуть систему с помощью уравнения для τ .

Ренормализационная группа и крупномасштабное динамо. Обобщение техники ренормализационной группы (см. подразд. 3) на МГД-турбулентностью здесь не будет проводиться. Мы рассмотрим лишь вопрос о крупномасштабных магнитных полях в рамках этого метода. Это даст нам возможность связать лангранжевы коэффициенты точной теории (см. гл. II) с эйлеровыми характеристиками, полученными при помощи этой техники.

Будем действовать так же, как в подразд. 3. Нам нужно вычислить по теории возмущений вектор $\langle [\mathbf{u}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k})] \rangle$. Пользуясь (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{u}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k})] \rangle &= -i [\mathbf{k}' \mathbf{B}(\mathbf{k}')] \langle u^2(\mathbf{k}) \rangle / 3Dk^2 - \\ &- i\mathbf{B} \langle (\mathbf{u}^*(\mathbf{k}) [\mathbf{k} \mathbf{u}(\mathbf{k})]) \rangle / 3Dk^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Псевдоскалярная величина $\langle (\mathbf{u}^*(\mathbf{k}) [\mathbf{k} \mathbf{u}(\mathbf{k})]) \rangle$ усреднена по направлениям (т. е. просуммирована по волновым векторам, модуль которых k) и поэтому зависит лишь от модуля волнового вектора \mathbf{k} . Дальнейшая ренормализация в подразд. 3, т. е. замена D_θ на $D_\theta + D_T(k)$, связана по своему физическому смыслу с усреднением по пульсации всех масштабов, меньших k^{-1} . В подразд. 3 это привело только к появлению турбулентного коэффициента диффузии, ответственного за пульсации масштабов. Теперь пульсации масштабов, меньшие k^{-1} , вызывают не только турбулентную диффузию, но и генерацию. Для усреднения по этим масштабам необходимо решить уравнение

$$\partial \mathbf{H} / \partial t - \alpha(k) \operatorname{rot} \mathbf{H} - (D_k + D) \Delta \mathbf{H} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}],$$

$\alpha(k) = \sum_{q>k} \Delta \alpha(k)$, $D_T(k) = \sum_{q>k} \Delta D_T(q)$, с помощью теории возмущений. Фурье-образ тензора Грина левой части уравнения есть

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{k}, t - t_1) &= \exp [-(D_k + D) k^2 (t - t_1)] \times \\ &\times [\delta_{ij} \operatorname{ch} k\alpha (t - t_1) + ik^{-1} \varepsilon_{ijf} k_f \operatorname{sh} k\alpha (t - t_1)]. \end{aligned}$$

Интегрируя G_{ij} по t_1 в пределах от 0 до t , получаем

$$\int_0^t G_{ij} dt_1 = [(D_T + D) k^2 \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijf} k_f \alpha] [(D_T + D)^2 k^4 - k^2 \alpha^2]^{-1}.$$

Это выражение заменяет $(Dk^2)^{-1}$ в (4.22) (и переходит в него при $\alpha = 0$). Здесь мы не выделяли зависимость D_T и α от k . Выпишем ренормализованное выражение (4.22)

$$\begin{aligned} \langle [u(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{h}(\mathbf{k})] \rangle = & -1/3 \{ \langle u^2(k) \rangle [(D_T(k) + D)^2 k^2 - \alpha^2(k)]^{-1} \} \times \\ & \times \{ i [\mathbf{k}' \mathbf{B}(\mathbf{k}')] (D_T(k) + D) + \mathbf{B}(\mathbf{k}') \alpha(k) \} - \\ & - 1/3 i \{ \langle u^*(\mathbf{k}) [\mathbf{k}u(\mathbf{k})] \rangle [(D_T(k) + D)^2 k^2 - \alpha^2(k)]^{-1} \} \times \\ & \times \{ i [\mathbf{k}' \mathbf{B}(\mathbf{k}')] \alpha(k) k^{-2} + \mathbf{B}(\mathbf{k}') (D_T(k) + D) \}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Очевидно, что первый член правой части (4.23) ответствен за турбулентную диффузию, второй — за генерацию. Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} \Delta D_T(k) = & \frac{1}{3} \frac{(D_T(k) + D) \langle u^2(k) \rangle + i \langle u^*(\mathbf{k}) [\mathbf{k}u(\mathbf{k})] \rangle \alpha(k) k^{-2}}{(D_T(k) + D)^2 k^2 - \alpha^2(k)}, \\ \Delta \alpha(k) = & - \frac{1}{3} \frac{(D_T(k) + D) i \langle u^*(\mathbf{k}) [\mathbf{k}u(\mathbf{k})] \rangle + \langle u^2(k) \rangle \alpha(k)}{(D_T(k) + D)^2 k^2 - \alpha^2(k)}. \end{aligned}$$

Эти уравнения примут дифференциальную форму, если воспользоваться правилами замены $\Delta D_T \rightarrow -dD_T$, $\Delta \alpha \rightarrow -d\alpha$, $\langle u^2(k) \rangle \rightarrow Edk$, $1/2 i \langle u^*(\mathbf{k}) [\mathbf{k}u(\mathbf{k})] \rangle \rightarrow \tilde{E}dk$. Выпишем эти уравнения:

$$\begin{aligned} dD_T/dk = & -1/3 [(D_T + D) E(k) + 2\tilde{E}\alpha k^{-2}] \times \\ & \times [(D_T + D)^2 k^2 - \alpha^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$d\alpha/dk = 1/3 [2(D_T + D) \tilde{E} + E(k) \alpha] [(D_T + D)^2 k^2 - \alpha^2]^{-1}.$$

Согласно (2.18) $\tilde{E} \sim k^{-7/3}$, следовательно, можно ожидать, что $\alpha \sim k\tilde{E}\tau(k) \sim k^{-2}$. В то же время $D_T \sim k^{-4/3}$. Поэтому при больших k имеем $(D_T(k) + D)^2 k^2 \gg \alpha^2$ и

$$\begin{aligned} D_T(k) = & -D + \left(D^2 + \frac{2}{3} \int_k^\infty E(k_1) k_1^{-2} dk_1 \right)^{1/2}, \\ \alpha(k) = & - \frac{2}{3} \int_k^\infty \tilde{E}(k_1) [D_T(k_1) + D]^{-1} k_1^{-2} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{1}{3} \int_k^{k_1} E(p) [D_T(p) + D]^{-2} p^{-2} dp \right\} dk_1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Откуда и видно, что действительно, $D_T \sim k^{-4/3}$, $\alpha \sim k^{-2}$. Выражение (4.25) справедливо при всех k , если гиротропность мала ($\alpha \ll D_T k$). В следующем приближении по параметру $\alpha/D_T k$ выражение для D_T уменьшится по сравнению с (4.25). Уменьшение коэффициента диффузии связано с дополнительной генерацией поля α -эффектом. Но, конечно, согласно второму уравнению (4.24) коэффициент D_T не может стать отрицательным даже при максимально большой гиротропности. Действительно, из неравенств $|\alpha| < k(D_T + D)$, $2|\tilde{E}| < kE$ следует, что и числитель и знаменатель первого выражения (4.24) положительны и $dD_T/dk < 0$. Ввиду того что при $k \rightarrow \infty$ величина $D_T \rightarrow 0$, получаем $D_T > 0$ при $k \rightarrow 0$. Отметим, что выражения для α и D_T получают

ся в функциональном подходе [47, 92] похожим на (4.24). Наконец, важное замечание. В подразд. 3 величина $D_T(k)k^2$ могла рассматриваться как обратное время корреляции μ для поля скалярной примеси, в то время как для магнитного поля $D_T(k)k^2$ описывает только один из двух конкурирующих процессов, а именно дробление масштабов. Можно ли формулировать проблему мелкомасштабного динамо в рамках техники ренормализационной группы, неизвестно.

6. Главный нелинейный эффект турбулентного динамо

В предыдущем подразделе выписана система уравнений (4.21), в которую входит неизвестная величина β_1 , ответственная за β -эффект. В данном подразделе мы и займемся этой величиной. Каким же образом создается гиротропность магнитного поля? Внешних источников гиротропности β_1 в природе нет. В отличие от обычной гиротропности, которая генерируется кориолисовой силой, гиротропность β_1 генерируется в самосогласованной задаче за счет энергии крупномасштабных полей [14]. Это связано с сохранением величины

$$\int \mathbf{A} \mathbf{h} dx = \text{const} \quad (4.26)$$

в процессе нелинейных взаимодействий. Если бы крупномасштабные поля не присутствовали в задаче, то сохранение (4.26) означало бы сохранение мелкомасштабной гиротропности магнитного поля. Поэтому генерация мелкомасштабных полей при наличии гиротропной турбулентности не привела бы к росту магнитной гиротропности. Если в начальный момент все-таки задать не равную нулю гиротропность магнитного поля, то, несмотря на сохранение ее согласно (4.26), она в конце концов диссипирует за счет омических потерь.

При наличии крупномасштабного магнитного поля ситуация меняется. Равенство (4.26) следует писать в виде $\int \langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B} dx + \int \mathbf{a} \mathbf{h} dx + \int \langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{h} dx + \int \mathbf{a} \mathbf{B} dx = \text{const}$, $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \langle \mathbf{A} \rangle$. Усредняя это выражение почленно и снимая знак интегралов (последняя операция не совсем законна, но используется нами для качественного анализа), получим $\langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B} + \langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle = \text{const}$. Отсюда следует, что если в начальный момент $\langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle = 0$ и в процессе генерации крупномасштабного поля величина $\langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B}$ становится отличной от нуля, то $\langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle$ тоже становится отличной от нуля. Наконец, рост $\langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle$ означает рост $\beta_1 \sim \langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle$. Во всяком случае, для однородных пульсаций

$$\langle \mathbf{h}_k \text{ rot } \mathbf{h}_k \rangle = k^2 \langle \mathbf{a}_k \mathbf{h}_k \rangle. \quad (4.27)$$

Поэтому знак величины $\langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle$ совпадает со знаком $\langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle$. Усредним теперь (4.26) непосредственно и возьмем производную от получившегося выражения по времени:

$$\int (d/dt \langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle + d/dt \langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B}) dx = 0. \quad (4.28)$$

Величина $\langle \mathbf{ah} \rangle$ зависит от координат только через крупномасштабные поля и меняется поэтому на характерной длине, равной масштабу полей \mathbf{B} и \mathbf{V} . Если считать, что интеграл в (4.28) взят по области, меньшей, чем масштаб полей \mathbf{B} и \mathbf{V} , но большей, чем l , то (4.28) будет эквивалентно выражению

$$\partial \langle \mathbf{ah} \rangle / \partial t + \partial_j V_j \langle \mathbf{ah} \rangle + \partial \langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B} / \partial t = 0 \quad (4.29)$$

(мы опустили малый член $\partial_j V_j \langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B}$, содержащий крупномасштабные поля в третьей степени).

Уравнение для гиротропности (4.29) получается при более строгом рассмотрении. Для этого составим уравнения для \mathbf{a} и \mathbf{h} , причем мы не будем предполагать, что $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Уравнения имеют вид

$$\partial \mathbf{a} / \partial t = [\mathbf{uB}] + [\mathbf{VB}] + [\mathbf{uh}] - \langle [\mathbf{uh}] \rangle, \quad (4.30)$$

$$\partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot } [\mathbf{uB}] + \text{rot } [\mathbf{VB}] + \text{rot } [\mathbf{uh}] - \text{rot } \langle [\mathbf{uh}] \rangle.$$

Умножим скалярно первое уравнение (4.30) на \mathbf{h} , второе — на \mathbf{a} , сложим и усредним, тогда будем иметь

$$\partial \langle \mathbf{ah} \rangle / \partial t = 2 \langle (\mathbf{h}[\mathbf{uB}]) \rangle + \text{div } \mathbf{N}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{N} = \langle ([\mathbf{uB}]\mathbf{a}) + ([\mathbf{uh}]\mathbf{a}) \rangle.$$

Итак, мы получили обычное для теории турбулентности уравнение для вторых моментов, содержащее третьи (в выражении для \mathbf{N}). Здесь можно воспользоваться приближением Орсага: выразить третьи моменты через четвертые и замкнуть систему. В данном случае этого можно не делать и угадать общий вид выражения для \mathbf{N} . Проанализируем возможный его вид. Прежде всего \mathbf{N} исчезает в однородном случае и обязано своим происхождением крупномасштабным полям, создающим неоднородность. Следовательно, этот вектор должен комбинироваться из крупномасштабных векторов. В точную систему уравнений (4.30) не входит вектор $\langle \mathbf{A} \rangle$, поэтому нам нужно рассмотреть комбинации из \mathbf{V} и \mathbf{B} . Мы не будем рассматривать комбинации, состоящие более чем из двух векторов: в (4.30) они входят лишь в нулевой, первой и второй степенях. В выражении для \mathbf{N} вектор \mathbf{B} не может входить один раз: в этом случае \mathbf{N} не будет инвариантен относительно преобразования $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$. Скомбинировать (псевдо) вектор из двух одинаковых векторов невозможно: единственный вектор есть $[\mathbf{LM}]$ и он обращается в нуль при $\mathbf{L} = \mathbf{M}$. Псевдовектор \mathbf{N} составляется единственно возможным образом с помощью вектора \mathbf{V} : $\mathbf{N} = -\langle \mathbf{ah} \rangle \mathbf{V}$, означающим простой перенос величины $\langle \mathbf{ah} \rangle$ крупномасштабным полем скорости¹.

В первый член правой части (4.31) подставим полученную в подразд. 5 корреляцию $\langle u_i h_j \rangle$ (см. 4.20)). Тогда имеем уравнение

$$\partial \langle \mathbf{ah} \rangle / \partial t + \partial_j \langle \mathbf{ah} \rangle V_j = 2[D_T(\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}) - (\alpha + \beta_1) V^2], \quad (4.32)$$

¹ Автор благодарен Н. И. Килорину, указавшему на эту возможность.

которое, как легко понять, совпадает с (4.29). Если теперь выражение $\langle \mathbf{ah} \rangle$ умножить на l^{-2} , то получим оценку *минимального* значения величины $\langle \mathbf{h rot h} \rangle$. В самом деле, действуя таким образом, мы полагаем, что энергия $\langle \mathbf{ah} \rangle$ сосредоточена в основном в масштабе l . Считая, что энергия $\langle \mathbf{ah} \rangle$ содержится в меньших масштабах, следовало бы для получения величины $\langle \mathbf{h rot h} \rangle$ умножить $\langle \mathbf{ah} \rangle$ на $(l')^{-2}$, где $l' < l$, и получить поэтому большую величину $\langle \mathbf{h rot h} \rangle$.

Мы исходим из минимального значения $\langle \mathbf{h rot h} \rangle$. Согласно (4.20) для получения β_1 нам еще нужно умножить это выражение на $\tau/[3(4\pi\rho)]$. В результате перейдем от уравнения для $\langle \mathbf{ah} \rangle$ к уравнению для β_1 :

$$\partial\beta_1/\partial t + \partial_j V_j \beta_1 = \frac{1}{3\pi\rho} [(\mathbf{rot V}, \mathbf{V}) - (\alpha + \beta_1) B^2 D_T^{-1}], \quad (4.33)$$

которое является искомым уравнением, замыкающим систему (4.21). Из этого выражения видно, что гиротропность β_1 появляется по двум причинам. Во-первых, если обычная гиротропность отсутствует ($\alpha = 0$), то β_1 растет из-за гиротропности крупномасштабного поля, обусловленной движением \mathbf{V} . Так, например, дифференциальное вращение генерирует тороидальное поле, такое, что $\mathbf{V rot V}$ станет отличным от нуля, если в начальный момент $\mathbf{V rot V} = 0$ (см. гл. I, подр. 2). Тогда согласно (4.33) будет возбуждаться гиротропность β_1 . Во-вторых, источником в (4.33) служит второй член правой части (4.33), не исчезающий при $\alpha \neq 0$. Заметим, что α -эффект тоже приводит к генерации гиротропного крупномасштабного поля, т. е. такого, что $\mathbf{V rot V} \neq 0$ (см. [15]).

Анализ мелкомасштабной структуры гиротропности магнитного поля. Поскольку величина $\langle \mathbf{AH} \rangle$ сохраняется, можно ожидать переноса мелкомасштабной составляющей этой величины в область больших волновых чисел и дальнейшей диссипации ее из-за омических потерь. Именно так и предполагалось в работе [87]. Если бы это было именно так, величина $\langle \mathbf{ah} \rangle$ исчезала бы за время τ и в уравнения (4.32), (4.33) следовало бы добавить τ -релаксационный член, что свело бы величину $\langle \mathbf{ah} \rangle$ практически к нулю. Это, однако, не так. Имеются две причины, препятствующие переносу гиротропности магнитного поля в область больших k .

Изложим первую причину. Как говорилось в подразд. 2, флуктуации масштабов, меньших l , представляют собой МГД-волны. Каждая из этих волн линейно поляризована. Например, альфвеновская волна в системе координат, где $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$, $\mathbf{k} = \{0, k_y, k_z\}$, имеет амплитуду \mathbf{h} , вектор которой параллелен оси x , вектор $\mathbf{rot h}$ параллелен оси z . Для нее, следовательно, выполняется $\langle \mathbf{h rot h} \rangle = 0$ (усреднение по фазе). То же самое можно сказать относительно других волн. Гиротропными волнами в плазме являются геликоны, рассмотрение которых находится за пределами применимости МГД, и мы не будем на этом останавливаться. Сумма волн двух типов может дать вектор \mathbf{h} , такой, что

$\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \neq 0$. Но ввиду того, что частоты этих двух волн разные, средняя величина $\langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle$ обратится в нуль, усреднение по фазе снимет любую корреляцию. В подразд. 2 обсуждался случай предельно большого плазменного давления $\beta \rightarrow \infty$, приводящий к тому, что частоты альфвеновской волны и медленного звука совпадают. В реальной ситуации, однако, частоты несколько различаются (на величину порядка $1/\beta$) и средняя гиротропность исчезает. К тому же в практически интересных случаях β не велико, несколько превышая единицу. Таким образом, при $kl \gg 1$ магнитная гиротропность отсутствует и, следовательно, не может переноситься в область больших k нелинейными взаимодействиями. Заметим, что добавление кориолисовой силы в уравнение движения приведет к тому, что возмущения (даже в виде волн) станут гиротропными. Это обстоятельство, однако, не имеет отношения к спектральному переносу энергии нелинейными взаимодействиями (кориолисова сила входит в уравнение движения линейным образом).

В пределе ($\beta \rightarrow \infty$) мы имели бы спектральный перенос. Но этому препятствует еще одно обстоятельство. Допустим, что имеется постоянный поток в область больших волновых чисел. По аналогии с гл. II подразд. 2 пишем $\langle \mathbf{a}_k \mathbf{h}_k \rangle / \tau(k) = \text{const}$. Так как $\tau \sim k^{-1/2}$ (см. (4.5)), получаем $\langle \mathbf{a}_k \mathbf{h}_k \rangle \sim k^{-1/2}$, а $\langle \mathbf{h}_k \text{ rot } \mathbf{h}_k \rangle \sim k^{3/2}$. Следовательно, $\langle \mathbf{h}_k \text{ rot } \mathbf{h}_k \rangle$ растет быстрее с ростом k , чем $k < \mathbf{h}_k \mathbf{h}_k \rangle \sim k^{1/2}$ (поскольку спектр Крейкнана дает $E_H \sim k^{-3/2}$, $\langle \mathbf{h}_k \mathbf{h}_k \rangle \sim k^{-1/2}$).

Между тем должно выполняться соотношение

$$|\mathbf{h}_k \text{ rot } \mathbf{h}_k| \leq k |\mathbf{h}_k \mathbf{h}_k| \quad (4.34)$$

для всех k . Это соотношение следует из требования положительной определенности спектрального тензора магнитного поля. Если источник гиротропности (крупномасштабное поле) слаб, то величина $\langle \mathbf{a}_k \mathbf{h}_k \rangle$ мала и (4.34) может в принципе выполняться для всех k . Определим условие малой эффективности источника. Пусть спектр турбулентности обрезается конечной электропроводностью согласно подразд. 2, $lk_d = (R'_m)^{2/3}$. Условие (4.34) означает, что оно выполняется вплоть до $k = k_d$, т. е. $lk_d = (R'_m)^{2/3} \leq \leq \langle \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0 \rangle / l |\mathbf{H}_0 \text{ rot } \mathbf{H}_0|$. Теперь (4.32) уже не полностью описывает процесс, следует учесть отток энергии $\langle \mathbf{a} \mathbf{h} \rangle$ в область больших k . Для учета этого обстоятельства добавим член $-\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{H}_0 \rangle \cdot \tau^{-1}$ в правую часть уравнения. Тогда для случая, когда первый член правой части (4.32) мал по сравнению со вторым, имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{H}_0 \rangle &= 2(\alpha + \beta_1) \tau B^2, \quad \langle \mathbf{H}_0 \text{ rot } \mathbf{H}_0 \rangle = 2(\alpha + \beta_1) B^2 / l \langle u^2 \rangle^{1/2}, \\ \beta_1 &= 2(\alpha + \beta_1) B^2 / 4\pi \rho \langle u^2 \rangle = 2(\alpha + \beta_1) \beta' \approx 2\alpha / \beta' \ll \alpha, \\ (R'_m)^{2/3} &\leq \langle u^2 \rangle^{1/2} \beta' / 2(\alpha + \beta_1) \approx \langle u^2 \rangle^{1/2} \beta' / 2 |\alpha|. \end{aligned}$$

Ввиду того что число R'_m чрезвычайно велико, последнее неравенство в астрофизических условиях, как правило, не выполняется.

Во всяком случае, если даже в начальный момент поле \mathbf{B} очень слабое, т. е. $\beta' \gg 1$, и это неравенство выполняется, что в процессе генерации поля \mathbf{B} величина β' уменьшится (хотя и будет оставаться больше единицы) и неравенство не сможет выполняться.

Таким образом, в реальных условиях поток величины $\langle \mathbf{a}_k \mathbf{h}_k \rangle$ в область больших волновых чисел запрещен и уравнения (4.32) и (4.33) полностью описывают процесс генерации величины β_1 .

Обратимся к выводам, следующим из (4.33). Рассмотрим случай, когда второй член правой части велик по сравнению с первым. Это соответствует условию $\alpha > D/L$ (L — масштаб поля \mathbf{B}), которое является условием генерации α^2 -динамо (т. е. без дифференциального вращения). Тогда уравнение (4.33) решается элементарно. Решение его с начальными условиями при $t = 0$, $\beta_1 = 0$ суть

$$\beta_1 = -\alpha \left\{ 1 - \exp \left[- \int_0^t B^2 dt_1 / (3 \cdot 4\pi\rho D_T) \right] \right\} \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow -\alpha. \quad (4.35)$$

Мы приходим к главному выводу данного подраздела. Ввиду того что $\beta_1 + \alpha \rightarrow 0$ в процессе генерации поля, рост поля в конце концов стабилизируется нелинейными эффектами. Дело в том, что именно коэффициент $\alpha + \beta_1$ во втором уравнении системы (4.21) ответствен за генерацию поля.

Выясним уровень энергии установившегося поля. Он получается из условия $|\beta_1| = |\alpha|$, т. е. (см. (2.17)):

$$\langle \mathbf{H}_0 \text{ rot } \mathbf{H}_0 \rangle / 4\pi\rho = l \langle u^2 \rangle^{1/2} \Omega \nabla\rho / \rho,$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{B} = |\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{H}_0 \rangle| = 4\pi l^3 \langle u^2 \rangle^{1/2} \Omega \nabla\rho,$$

$$B^2 / 4\pi\rho = (l^3 / L) \langle u^2 \rangle^{1/2} \Omega (\nabla\rho / \rho).$$

Составляя безразмерную величину β' (по (4.7))

$$(\beta')^{-1} = \frac{l}{L} \frac{l |\nabla\rho|}{\rho} \frac{l\Omega}{\langle u^2 \rangle^{1/2}} = \frac{\alpha}{\langle u^2 \rangle^{1/2}} \frac{l}{L} \ll 1, \quad (4.36)$$

видим, что установившееся значение $\beta' \gg 1$. Выражение (4.36) выписано со всеми малыми параметрами в явном виде (мы воспользовались выражением для α , когда обратное число Россби мало, но α всегда меньше $\langle u^2 \rangle^{1/2}$). Итак, нелинейность стабилизирует рост поля на слабонелинейном уровне. Время установления стабилизированного поля t_B можно определить с помощью (4.35) и (4.36):

$$t_B = L/\alpha. \quad (4.37)$$

Оно не зависит от начального поля (хотя стабилизация — существенно нелинейный процесс) и совпадает со временем усиления поля в линейном режиме. При очень слабом начальном поле \mathbf{B} происходит экспоненциальное усиление поля (в процессе α^2 -динамо, рассмотрением которого мы ограничились) с показателем экспоненты α/L . Достигнув уровня, близкого к (4.36), рост поля за время L/α стабилизируется.

Обсудим другую ситуацию. Пусть первый член правой части (4.33) не мал по сравнению со вторым. Если α -эффект вообще отсутствует, но в системе имеется дифференциальное вращение, то возникающее тороидальное поле так связано с полоидальным, что $\text{rot } \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \neq 0$. Поэтому согласно (4.33) гиротропность β_1 начнет генерироваться. Это приведет к β -эффекту, т. е. к генерации поля за счет члена $\beta' \text{rot } \mathbf{V}$ во втором уравнении системы (4.21). Появится возможность обратной связи между тороидальным и полоидальным полями и *без α -эффекта*. Тем самым β -эффект будет возбуждать полоидальное поле из тороидального. Здесь возможны два режима: экспоненциальное усиление поля \mathbf{V} и осцилляторное решение (наподобие солнечного цикла). Рассмотрим первый из них. Согласно (4.33) при $\alpha = 0$ стабилизация наступает, когда два члена правой части сравниваются, т. е. $\beta_1 = \langle u^2 \rangle^{1/2} l/L$, $B^2/4\pi\rho = \langle u^2 \rangle l^2/L^2$, $\beta' = L^2/l^2 \gg 1$. Мы видим, что и эта стабилизация происходит на слабонелинейном уровне.

Анализ второго случая ($\alpha \neq 0$, дифференциальное вращение присутствует) более сложен. Еще более сложным является анализ нелинейного эффекта для осцилляторного решения типа солнечного цикла. Здесь мы ограничимся общим соображением о несомненно большой роли β -эффекта в общем случае. Особенно большие перспективы возникают благодаря возможности построения теории солнечного цикла без α -эффекта с помощью одного только β -эффекта и с привлечением дифференциального вращения.

Турбулентное динамо в присутствии сильных магнитных полей. Мы видели выше, что теория не предсказывает появления сильных магнитных полей, т. е. таких, что $\beta' < 1$. Тем не менее такие поля могут генерироваться в конвективной зоне, например где $\beta' > 1$, а затем проникать на поверхность. В результате величина β' станет меньше единицы и турбулентность преобразуется в волны. Если при этом останется двумерная турбулентность (см. гл. II, подразд. 3), то ни о какой дальнейшей генерации не может быть и речи (двумерное движение не генерирует поле).

Обсудим возможность генерации поля волновыми движениями. Ввиду того что теория волнового процесса и взаимодействия с волной может быть построена с помощью малого параметра (в данном случае магнитного числа Маха $M_A = 4\pi\rho v/B$), процесс генерации и диффузия поля могут быть рассмотрены регулярным способом (без привлечения диффузионного приближения, например). Однако, как мы увидим далее, расчеты должны проводиться до членов четвертого порядка по степеням магнитного числа Маха. Это создает огромные трудности при вычислениях. Насколько нам известно, единственная работа, в которой был получен коэффициент турбулентной диффузии в этой задаче, это работа Иванова [93]. Напомним, что речь идет о высокопроводящей плазме (исследование МАК-волн Брагинского относится к слабопроводящему случаю).

В этом пункте обсудим реакцию волновой турбулентности на крупномасштабное магнитное поле (причем $\mathbf{V} = 0$). Роль волн

сводится, как можно ожидать, к двум эффектам — турбулентной диффузии и генерации. Вопрос о турбулентной диффузии рассмотрен в работе [93]. Качественно ясно, что скалярная примесь будет диффундировать при наличии МГД-волн таким же образом, как это описано в гл. II, подразд. 10. Описание там относилось к диффузии магнитного поля, но поскольку речь шла о кинематическом подходе, то диффузия скалярной примеси и магнитного поля были неотличимы. Сильное крупномасштабное магнитное поле может вызвать течение, которое в свою очередь повлияет на процесс диффузии. Если отвлечься от этого процесса, например полагая поле \mathbf{B} параллельным оси z и зависящим от x и y , когда электромагнитная сила компенсируется давлением, то процесс диффузии поля будет вполне аналогичен диффузии примеси с турбулентным коэффициентом $D_T = \nu M_A^3 = B M_A^1 / 4\pi\rho$ (ср. с гл. II, подразд. 10). Отсюда видно, что для получения коэффициента D_T регулярными методами необходимо проводить вычисления до членов четвертого порядка по малой величине M_A , о чем говорилось выше.

Перейдем к обсуждению эффектов генерации для волновой турбулентности. Прежде всего, как отмечалось выше в этом подразделе, МГД-волны линейно поляризованы и поэтому не дают средней гиротропности (выше говорилось о том, что для волн величина $\langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle = 0$, также можно показать, что для МГД-волн $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle = 0$). Генерация крупномасштабного поля может осуществляться в виде модуляционной неустойчивости. На фоне волн с длиной волны l и меньше возбуждается волна с длиной волны $L \gg l$. Иначе говоря, происходит модуляция МГД-волн. Для этого процесса не требуется наличие гиротропности. Подробнее о модуляционных явлениях читатель может посмотреть в [1].

Гиротропность МГД-волн будет иметь место, если учесть кориолисову силу. Линеаризованные уравнения идеальной магнитной гидродинамики имеют вид (поле \mathbf{B} однородное, Ω — угловая скорость, $\rho = \rho_0 + \rho'$):

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + 2 [\Omega \mathbf{v}] = -\nabla p / \rho + [\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{B}] / 4\pi\rho,$$

$$\partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \partial \rho' / \partial t + \text{div } \rho_0 \mathbf{v} = 0.$$

Рассмотрим сначала среду с однородной плотностью $\rho_0 = \text{const}$. Тогда для плоской волны система переписывается так:

$$-i\omega \mathbf{v} + 2 [\Omega \mathbf{v}] = -iks^2\omega^{-1}(\mathbf{k}\mathbf{v}) + i[\mathbf{k}\mathbf{h}] \mathbf{B} / 4\pi\rho_0, \tag{4.3.}$$

$$-\omega \mathbf{h} = [\mathbf{k} [\mathbf{v}\mathbf{B}]].$$

Как $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$, так и $\langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle$ могут быть пропорциональны лишь псевдоскаляру $\Omega \mathbf{k}$. Другой возможный псевдоскаляр $\mathbf{k}\mathbf{B}$ здесь не может появиться, поскольку он не инвариантен относительно преобразования $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$. Итак,

$$\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle = a \langle v^2 \rangle \mathbf{k} \Omega \omega^{-1}, \tag{4.39}$$

$$\langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle / 4\pi\rho = b \langle h^2 \rangle \mathbf{k} \Omega \omega^{-1} / 4\pi\rho,$$

a, b — безразмерные константы. Отсюда видно, что гиротропность может возникнуть только при наличии анизотропии, т. е. если энергия волн с волновым вектором \mathbf{k} больше энергии волн, идущих в обратном направлении, т. е. с волновым вектором $-\mathbf{k}$. Заметим, что из второго выражения (4.39) особенно очевидна невозможность переноса гиротропности магнитного поля нелинейными взаимодействиями, о котором говорилось в предыдущем разделе. Действительно, при $kl \gg 1$ турбулентность изотропна (при усреднении по масштабам большим, чем l), и согласно (4.39) гиротропность магнитного поля отсутствует при $kl \gg 1$.

Полагаем, что угловая скорость мала ($\Omega \ll Bk(4\pi\rho)^{-1/2}$). Тогда амплитуды \mathbf{v} и \mathbf{h} можно представить в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}'$, где $\mathbf{v}_0, \mathbf{h}_0$ — амплитуды волны при отсутствии кориолисовой силы. Как сказано выше, $\langle \mathbf{v}_0 \text{ rot } \mathbf{v}_0 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{h}_0 \text{ rot } \mathbf{h}_0 \rangle = 0$ и

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}_0 \text{ rot } \mathbf{v}' \rangle + \langle \mathbf{v}' \text{ rot } \mathbf{v}_0 \rangle, \\ \langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle &= \langle \mathbf{h}_0 \text{ rot } \mathbf{h}' \rangle + \langle \mathbf{h}' \text{ rot } \mathbf{h}_0 \rangle. \end{aligned}$$

В плазме высокого давления $\beta = 8\pi\rho/B^2 \rightarrow \infty$, и для альфвеновской волны и медленного звука имеем $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_0/4\pi\rho$. Из второго уравнения (4.38) получаем при $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ (несжимаемость)

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= -\mathbf{v} (k\mathbf{B}) \omega^{-1}, \quad \omega = \omega_0 + \omega' = -k\mathbf{B} (4\pi\rho)^{-1/2} + \omega', \\ \mathbf{h}'/(4\pi\rho)^{1/2} &= \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0\omega'/\omega \approx \mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что поправка к частоте ω' есть истинный скаляр и не может быть пропорциональной Ω в первой степени, поправка есть величина порядка Ω^2 и поэтому мала. Отсюда следует, что для альфвеновской волны и медленного звука коэффициенты a и b в (4.39) равны друг другу. Для определения коэффициентов α и β_1 воспользуемся тем, что, как говорилось в гл. II, подразд. 10, диффузионные процессы при наличии волнового процесса ведут себя как марковские процессы. Тогда

$$\alpha = -1/3 \frac{\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle}{\omega_0} \frac{v^2 4\pi\rho}{B^2}, \quad \beta_1 = 1/3 \frac{\langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle}{4\pi\rho\omega_0} \frac{v^2 4\pi\rho}{B^2}$$

(везде входит четвертая степень возмущения, как для коэффициента диффузии). Учитывая, что в выражении (4.39) $a = b$, имеем для альфвеновских волн и замедленного звука $\alpha + \beta_1 = 0$. Следовательно, согласно (4.21) эти волны не способны генерировать магнитное поле.

Что касается быстрого магнитного звука, то здесь $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{k}$ и $h_0 (4\pi\rho)^{-1/2} \ll v_0$. Но, как легко видеть, в этом случае $\langle \mathbf{v}_0 \text{ rot } \mathbf{v}' \rangle + \langle \mathbf{v}' \text{ rot } \mathbf{v}_0 \rangle = 0$.

Рассмотрим общий случай произвольного β . Пусть $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$, $\mathbf{k} = \{0, k_y, k_z\}$. Обратимся сначала к быстрому и медленному магнитным звукам. Для них \mathbf{h}_0 и \mathbf{v}_0 лежат в плоскости YZ . Поскольку в гиротропность дает вклад лишь несжимаемая часть скорости, спроецируем нулевое приближение ($\Omega = 0$) первого уравнения (4.38) на вектор, перпендикулярный вектору

$\mathbf{k} \cdot -\omega \mathbf{v}'_{\perp} / \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{h}_0 / 4\pi\rho$, $\mathbf{v}'_{\perp}^{(0)}$ — несжимаемая часть скорости, т. е. $\mathbf{v}_0 = c \mathbf{k} + \mathbf{v}'_{\perp}^{(0)}$, $\mathbf{k} \mathbf{v}'_z^{(0)} = 0$. В то же время ясно, что только проекция векторов \mathbf{v}' и \mathbf{h}' на ось x дает вклад в гиротропность. Спроектируем поэтому второе уравнение (4.38) на ось x : $-\mathbf{v}'_x \mathbf{k} \mathbf{v} \omega^{-1} = \mathbf{h}'_x$. Составляя выражения для гиротропности (т. е. умножаем выражение для $\mathbf{v}'_{\perp}^{(0)}$ векторно на $i \mathbf{k}$ и получившийся вектор — скалярно на \mathbf{v}' , но поскольку $[\mathbf{k} \mathbf{v}'_{\perp}^{(0)}]$ есть вектор, параллельный оси x , то скалярное произведение сводится к умножению только на \mathbf{v}'_x , пользуясь выписанным выражением для \mathbf{v}'_x), получаем

$$\langle \mathbf{v}_0 \text{ rot } \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v}' \text{ rot } \mathbf{v}_0 \rangle = \frac{1}{4\pi\rho_0} \langle \mathbf{h}' \text{ rot } \mathbf{h}_0 \rangle = \frac{1}{4\pi\rho_0} \langle \mathbf{h}_0 \text{ rot } \mathbf{h}' \rangle.$$

Следовательно, мы опять получаем в (4.39) $a = b$, и генерация поля невозможна. Для альфвеновской волны векторы \mathbf{v}_0 и \mathbf{h}_0 параллельны и направлены по оси x . Тогда из второго уравнения (4.38) следует $-\mathbf{v}_0 \mathbf{k} \mathbf{v} \omega^{-1} = \mathbf{h}_0$, а из первого уравнения (4.38) в первом приближении

$$-i\omega [\mathbf{k} \mathbf{v}'] / \mathbf{k} \mathbf{v} - 2v_0 \mathbf{k} \Omega / \mathbf{k} \mathbf{v} = i [\mathbf{k} \mathbf{h}'] / 4\pi\rho_0.$$

Перемножая полученные уравнения, имеем

$$\mathbf{v}_0 \text{ rot } \mathbf{v}' + 2v_0 \mathbf{v}_0^* \frac{\mathbf{k} \Omega}{\omega} = \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{h}_0 \text{ rot } \mathbf{h}'.$$

На этот раз обычная гиротропность несколько отличается от гиротропности магнитного поля (различие небольшое, поскольку, как предполагается, $\omega \gg \Omega$). Теперь генерация поля возможна, и инкремент нарастания есть $\gamma \approx (\alpha + \beta_1) / L$:

$$\gamma = \frac{v^3 \mathbf{k} \Omega}{\omega^2 L} \frac{v^2 4\pi\rho}{B^2} = \frac{v^3 \mathbf{k} \Omega}{\omega^2 L} \beta'.$$

Заметим, однако, что рост поля происходит довольно медленно. В инкремент входит напряженность самого поля в четвертой степени. Если считать, что энергия волн сохраняется в процессе усиления поля, т. е. $v^2 = \text{const}$, или что поток энергии волн сохраняется, т. е. $\rho v^2 B / 4\pi\rho = \text{const}$ и v^2 убывает, то скорость роста будет быстро падать, и рост скоро прекратится.

Для волн в среде с неоднородной плотностью псевдоскаляры могут конструироваться в виде, отличном от (4.39), поскольку теперь имеется новый псевдоскаляр $\nabla\rho\Omega$. Но качественно все выводы не изменятся.

Вернемся в заключение к вопросу о переносе гиротропности магнитного поля нелинейными взаимодействиями. В неоднородной среде гиротропность может возникнуть (в отличие от (4.39)) для изотропно распределенных колебаний и $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle \sim \langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle \sim \nabla\rho\Omega$. Эта гиротропность, однако, связана с линейными свойствами среды. В предыдущем пункте мы имели дело с гиротропностью, которая генерируется крупномасштабными полями и не

является присущей магнитным и кинетическим флюктуациям как таковым, поэтому спектральный перенос ее в область больших волновых чисел не связан, вообще говоря, с «линейной» гиротропностью, пропорциональной $\nabla\rho\Omega$. Иначе говоря, колебания уже невозможно «нагрузить» дополнительной гиротропностью, которую они переносили бы нелинейными взаимодействиями, и поэтому гиротропность в масштабе l (и добавленная к существенно неволновым флюктуациям масштаба l , как это рассматривалось в предыдущем пункте) сохраняется и не переходит в область больших волновых чисел.

7. Динамика крупномасштабных полей в неоднородной турбулентной среде

В этом подразделе мы обобщим результаты подразд. 5 на неоднородную среду. Будем пользоваться тем же методом, что и в подразд. 5, т. е. диффузионным приближением, при выводе уравнений для крупномасштабных полей. Какие явления, связанные с неоднородностью, можно ожидать? Очевидно, что нелинейность должна каким-то образом модифицировать диамагнитный эффект, возникающий в турбулентности с неоднородной интенсивностью (см. гл. II, подразд. 9, и гл. III, подразд. 12). Мы увидим, что турбулентность вызывает дополнительно парамагнетизм, который снижает диамагнитный эффект. Не менее интересными являются эффекты, связанные с неоднородностью плотности. В гл. III, подразд. 12, говорилось о том, что в кинематической постановке задачи изотропная турбулентность не приводит к переносу поля, если плотность плазмы зависит от координат. Переносы в двух направлениях — параллельном $\nabla\rho$ и антипараллельном ему — компенсируют друг друга в изотропном случае, в результате суммарный перенос отсутствует. В нелинейной задаче оказывается, что один из видов переноса преобладает над другим. Это приводит к весьма эффективному переносу, гораздо более интенсивному по сравнению с диамагнитным, о котором говорилось в гл. II, подразд. 9. Что касается вклада турбулентности в уравнение движения, то специфически неоднородным эффектом является турбулентное давление. Последнее может иметь большое значение в динамике солнечного ветра.

В целом получение уравнений для крупномасштабных полей и приведет нас к формулировке макроскопической магнитной гидродинамики. Далее полагаем, что напряженность крупномасштабных полей мала по сравнению с флюктуациями, т. е. величина β' , определенная в (4.7), велика, и, кроме того, выполняется условие (4.12). Следовательно, пульсации не носят волнового характера.

Неоднородная интенсивность турбулентности. Считаем, что жидкость несжимаема, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, и слабо неоднородна. Последнее означает, что $l |\lambda| = l |\nabla \langle u^2 \rangle| / \langle u^2 \rangle \ll 1$. Связь между кинетической и магнитной энергиями пульсаций дается общим

соотношением (4.2). Тогда условие слабой неоднородности означает дополнительно, что $l |\lambda^{(m)}| = l \nabla \langle h^2 \rangle / \langle h^2 \rangle \ll 1$. Нам потребуются следующие тензоры невозмущенной (крупномасштабными полями) турбулентности: $\langle u_i \partial_j u_j \rangle^0$ и $\langle h_i \partial_j h_j \rangle^0$, которые для неоднородной интенсивности турбулентности не обращаются в нуль. В простейшем квазиизотропном случае, когда анизотропия пульсаций вынуждена возникать из-за неоднородности, используя условие несжимаемости и ограничиваясь членами первого порядка малости по параметрам λl , $\lambda^{(m)} l$, имеем (см. [1])

$$\begin{aligned} \langle u_i \partial_j u_j \rangle^0 &= 1/6 \langle u^2 \rangle^0 [\lambda_j \delta_{ij} + 1/2 (\lambda_j \delta_{if} - \lambda_i \delta_{jf})] + \\ &+ 1/6 \langle \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u} \rangle^0 \varepsilon_{ijj}, \\ \langle h_i \partial_j h_j \rangle^0 &= \frac{\langle h^2 \rangle^0}{6} [\lambda_j^{(m)} \delta_{ij} + 1/2 (\lambda_j^{(m)} \delta_{if} - \lambda_i^{(m)} \delta_{jf})] + \frac{\langle \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} \rangle^0}{6} \varepsilon_{ijj}. \end{aligned}$$

При вычислении по схеме подразд. 5 нам требуется определить поправки к корреляционным тензорам, возникающим из-за действия крупномасштабных полей. Выпишем их:

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle' &= -1/3 \tau \langle u^2 \rangle^0 [2/5 (\partial_i V_j + \partial_j V_i) + \delta_{ij} (\mathbf{V} \boldsymbol{\lambda})], \\ \langle h_i h_j \rangle' &= 1/3 \tau \langle h^2 \rangle^0 [\partial_i V_j + \partial_j V_i - \delta_{ij} (\mathbf{V} \boldsymbol{\lambda}^{(m)})], \\ \langle u_i h_j \rangle' &= \frac{\tau}{4\pi\rho} \frac{\langle h^2 \rangle^0}{15} (\partial_i B_j + \partial_j B_i) - 1/3 \tau \langle u^2 \rangle^0 \partial_i B_j + \\ &+ \tau B_f \left(\frac{1}{4\pi\rho} \langle h_j \partial_j h_i \rangle^0 + \langle u_i \partial_j u_j \rangle^0 \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

В однородном случае выражения (4.40) переходят, очевидно, в (4.20). Выпишем усредненные уравнения, являющиеся обобщением системы (4.21) на неоднородный случай, полученные в [90]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_i + \partial_j V_i V_j + \frac{1}{\rho} \partial_i \langle p \rangle + \frac{1}{\rho} \partial_j \pi_{ij}(\mathbf{B}) &= -\frac{1}{\rho} \partial_i p_T + \\ &+ \partial_j \chi_T (\partial_i V_j + \partial_j V_i) + \partial_i \partial_j \kappa V_j, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}] &= -\operatorname{rot} D'_T \operatorname{rot} \mathbf{B} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} D''_T \mathbf{B} + \operatorname{rot} (\alpha + \beta_1) \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{1}{3} \tau \left(\frac{2}{5} \langle u^2 \rangle^0 + \frac{1}{4\pi\rho} \langle h^2 \rangle^0 \right), \\ D'_T &= \frac{\tau}{6} \left(\langle u^2 \rangle^0 + \frac{\langle h^2 \rangle^0}{4\pi\rho} \right), \quad D''_T = \frac{\tau}{6} \left(\langle u^2 \rangle^0 - \frac{\langle h^2 \rangle^0}{4\pi\rho} \right), \\ p_T &= \frac{1}{3} \rho \left(\langle u^2 \rangle^0 + \frac{1}{2} \frac{\langle h^2 \rangle^0}{4\pi\rho} \right), \quad \kappa = \frac{1}{\rho} \tau p_T. \end{aligned}$$

В системе (4.41) вклад турбулентности выписан в правой части. Член, содержащий $\langle p \rangle$, компенсирует потенциальную составляющую крупномасштабных сил.

Парамагнетизм и пульсационное давление. Эффекты, связанные с переносом поля, появляются только из-за члена второго уравнения системы (4.41), содержащего D''_T . Действительно, если

D_T'' зависит от координат (что и предполагается), то только этот член дает перенос $-\text{rot rot } D_T'' \mathbf{V} = \text{rot} [\mathbf{V}_D \mathbf{V}]$, $\mathbf{V}_D = -\nabla D_T''$). Первый член правой части не дает вклад в скорость \mathbf{V}_D . Из вида этого коэффициента D_T'' (точнее, функции) следует, что магнитные пульсации дают вклад со знаком, обратным знаку, получаемому при кинематическом подходе. В кинематической постановке задачи $\langle h^2 \rangle^0 = 0$ и мы имеем дело с диамагнитным эффектом. Магнитные пульсации дают обратный парамагнитный эффект.

Вывод электродинамических уравнений будем проводить, пользуясь (4.2) и полагая, что δ не зависит от координат. Уравнения электродинамики следуют из второго уравнения системы (4.41). Поэтому выписанные ниже уравнения, а также первое уравнение системы (4.41) представляют полную систему уравнений макроскопической магнитной гидродинамики. Выпишем уравнения электродинамики:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_1 &= \frac{4\pi}{c} \sigma_T \left(\langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}] \right), \quad \mathbf{B} = \mu_T \mathbf{H}_1, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \quad \text{rot } \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \sigma_T &= \sigma (1 + R_m')^{1/2 \delta - 1}, \quad \mu_T = (1 + R_m')^{-1/2 \delta}, \quad R_m' = \frac{\tau \langle u^2 \rangle^0}{3D}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Отсюда видно, что при $\delta = 0$ (полное равномерное распределение) получаем $\mu_T = 1$, диамагнитный эффект исчезает. Это, впрочем, ясно из самого вида коэффициента D_T'' , ответственного за диамагнетизм. При полном равномерном распределении он обращается в нуль. В конвективной зоне (Солнца) можно полагать $\delta > 0$ (см. подразд. 2), поэтому там имеет место ослабленный (в несколько раз) диамагнитный эффект. Далее мы покажем, что неоднородность плотности в конвективной зоне приводит к гораздо более сильному переносу поля. Интересно отметить, что при $\delta < 0$, когда источником турбулентности являются неустойчивость, генерирующие магнитные поля (солнечного ветра), будет иметь место парамагнитный эффект. Турбулентная проводимость всегда меньше обычной, это видно из выражения (4.42) с учетом того, что $\delta < 1$. Возвращение к кинематическому подходу имеем при условии $\delta = 1$, тогда $\langle h^2 \rangle = 0$ и $\mu_T = (1 + R_m')^{-1/2}$, $\sigma_T = \sigma (1 + R_m')^{-1/2}$, что совпадает с результатами [51].

Сформулируем граничные условия на поверхности, отделяющей область, занятую турбулентностью, от нетурбулентной плазмы. Такая ситуация реализуется на дне конвективной зоны Солнца. Нормальная составляющая поля непрерывна (что следует из уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$, выполняющегося во всем пространстве): $\mathbf{V}_n^{(1)} = \mathbf{V}_n^{(2)}$. Индексы (1) и (2) относятся к нетурбулентной и турбулентной областям соответственно. Тангенциальная составляющая меняется скачком: $\mathbf{V}_t^{(1)} = (1 + R_m')^{\delta/2} \mathbf{V}_t^{(2)}$. Выписанные граничные условия получаются обычным для электродинамики сплошных сред способом — интегрированием уравнений (4.42) по

пограничному слою. Диамагнитный эффект приводит к сильному вытеснению поля из турбулентной области ($| \mathbf{V}_t^{(1)} | \gg | \mathbf{V}_t^{(2)} |$).

Объясним физический смысл парамагнитного эффекта, возникающего в нелинейной задаче. Для этого вернемся к рис. 3.1, 3.2 (см. гл. III, подразд. 12). Средний квадрат скорости убывает с ростом x , поэтому слева силовая трубка возмущается больше, чем справа, как это изображено на рисунках. Теперь, в нелинейном случае, нас интересуют те электромагнитные силы, которые возникают при таком возмущении однородного магнитного поля. Очевидно, что электромагнитная сила вынуждает распрямляться силовые линии, как в натянутой струне. Из рис. 3.1 видно, что сила заставляет жидкость двигаться влево, т. е. сила действует против направления скорости, вызвавшей возмущение (это естественно). Из рис. 3.2 следует, что здесь возникает сила, заставляющая двигаться жидкость направо, т. е. тоже против направления скорости. Однако сила, действующая в первом случае (см. рис. 3.1), больше той, которая соответствует силе на рис. 3.2. Действительно, масштаб возмущений на обоих рисунках одинаков (и равен l), но возмущенное поле на рис. 3.1 больше, чем на рис. 3.2. Электромагнитная сила оценивается как $h^2/4\pi\rho$, откуда и следует, что на рис. 3.2 она больше. Итак, результирующий нелинейный эффект заключается в действии силы на жидкость в направлении, параллельном вектору $\nabla \langle u^2 \rangle$. Это приводит к возникновению потока жидкости и замороженного в жидкость поля в этом же направлении. Напомним, что согласно этим же рисункам в кинематической постановке мы имели поток изображенного на рисунках поля в противоположном направлении, параллельном вектору $-\nabla \langle u^2 \rangle$. Поэтому нелинейность даст эффект, противоположный диамагнетизму, т. е. парамагнетизм. Речь пока шла о поле, лежащем в плоскости XU , т. е. в плоскости движения жидкости. Напомним, что наглядная картина (см. рис. 3.1, 3.2) относится к двумерному движению. Поле, параллельное оси z , не испытывает ни диамагнитного эффекта, ни парамагнитного, поскольку оно переносится как скалярная примесь. Зато для него существенна турбулентная электропроводность. В общем трехмерном случае все эффекты «распределяются» между турбулентной электропроводностью и турбулентной магнитной проницаемостью, как в системе (4.42).

Еще одно следствие неоднородности связано с пульсационным давлением: в уравнении движения (4.41) появилась сила $\partial_i p_t$. Пульсационное давление может оказаться существенным в том случае, когда давление плазмы ниже давления пульсаций. Такая ситуация имеет место для солнечного ветра на расстояниях, меньших тридцати радиусов Солнца (до так называемой альфвеновской точки). Сила, вызываемая пульсационным давлением, вносит существенный вклад в динамику и процесс самого истечения солнечного ветра. Отметим, что неоднородность не влияет кардинальным образом на гидротропную часть, т. е. на генерацию поля. Из (4.44)

только следует, что величина $\alpha + \beta_1$ должна быть поставлена под знак rot , если эта величина зависит от координат.

Неоднородная плотность среды. Считаем, что движения дозвуковые. Это, конечно, ограничит область применимости результатов. Так, в солнечном ветре возмущения скорости порядка скорости звука. Тем не менее можно ожидать, что по крайней мере на качественном уровне этими результатами можно пользоваться для описания солнечного ветра. Выводы непосредственно применимы к конвективной зоне Солнца, где число Маха действительно очень мало. Предположение о дозвуковых возмущениях эквивалентно требованию

$$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (4.43)$$

которое в неоднородной среде уже не сводится к условию несжимаемости. Условие (4.43) соответствует тому, что плотность среды не возмущается, звук не возбуждается и $\rho = \rho(\mathbf{x})$.

Будем по-прежнему полагать, что крупномасштабные поля слабые. Для дальнейшего удобно перейти к уравнению для плотности импульса $\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}$ (этот переход и вычисления заимствуем из работы Кичатинова [90]):

$$\partial P_i / \partial t + \partial_j P_i P_j / \rho + \partial_i p + \partial_j \pi_{ij}(\mathbf{H}) = 0,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{W} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{W} = \langle \mathbf{P} \rangle.$$

Вектор \mathbf{P} соленоидален, $\text{div } \mathbf{P} = 0$. Пользуясь этим, можно исключить давление, для чего уравнение для \mathbf{P} записывается в фурье-представлении

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P_i(\mathbf{k})}{\partial t} + i \sigma_{if}(\mathbf{k}) \int [v_f(\mathbf{p}) P_j(\mathbf{q}) - \frac{1}{4\pi} H_f(\mathbf{p}) H_j(\mathbf{q})] d\mathbf{q} = 0, \quad (4.44)$$

$\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{q}$. Теперь (4.44) необходимо усреднить почленно и вычесть из точного уравнения (4.44) усредненное. Тогда получится уравнение для \mathbf{w} , в которое войдут поля \mathbf{V} , \mathbf{B} и третьи моменты по флуктуациям. Далее необходимо составить среднее $\langle w_i(\mathbf{k}) w_f(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle$ и уравнение для него. Возникшие третьи моменты заменяются τ -релаксационными (как выше).

Выпишем уравнение для возмущенного тензора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tau^{-1} \langle w_i(\mathbf{k}) w_f(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle' &= - i k_j \sigma_{il}(\mathbf{k}) \int [V_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle w_f(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle' \\ &\times w_j(\mathbf{q}) \rangle^0 + V_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle w_f(\mathbf{p} - \mathbf{k}) w_l(\mathbf{q}) \rangle^0] d\mathbf{q} - \\ &- i(\mathbf{p} - \mathbf{k})_j \sigma_{jl}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \int [V_l(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle w_i(\mathbf{k}) w_j(\mathbf{q}) \rangle^0 + \\ &+ V_j(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \langle w_i(\mathbf{k}) w_l(\mathbf{q}) \rangle^0] d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Переход в x -представление дает искомый второй момент $\langle u_i u_j \rangle' = \rho^2 \langle w_i w_j \rangle'$. Возмущенные моменты $\langle h_i h_j \rangle'$ и $\langle u_i h_j \rangle'$ вычисляются аналогично:

$$\langle u_i u_j \rangle' = - \frac{\tau \langle u^2 \rangle^0}{3} \left[\frac{2}{5} (\partial_i V_j + \partial_j V_i + \delta_{ij} \text{div } \mathbf{V}) + \delta_{ij} \mathbf{V} \lambda \right],$$

$$\langle h_i h_j \rangle' = \frac{\tau \langle h^2 \rangle^0}{3} [\partial_i V_j + \partial_j V_i - 2\delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{V} - \delta_{ij} \mathbf{V} \lambda^{(m)}], \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \langle u_i h_j \rangle' &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\tau \langle h^2 \rangle^0}{15} (\partial_i B_j + \partial_j B_i) - \frac{\tau \langle u^2 \rangle^0}{3} \rho \partial_i \mathbf{B}_j \frac{1}{\rho} + \\ &+ \tau B_j \left(-\frac{1}{4\pi\rho} \langle h_j \partial_i h_i \rangle^0 + \langle u_i \partial_j u_j \rangle^0 \right). \end{aligned}$$

Векторы λ , $\lambda^{(m)}$ определены в предыдущем разделе, они соответствуют неоднородности интенсивности турбулентности. Отсюда видно, что при выводе (4.45) учитывалась не только неоднородность плотности, но и неоднородность $\langle u^2 \rangle^0$ и $\langle h^2 \rangle^0$. Сравнивая (4.40) и (4.45), видим, что эти выражения отличаются слабо. В (4.45) появились лишь члены с $\operatorname{div} \mathbf{V}$ и, кроме того, производная $\partial_i \rho$ в выражении для $\langle u_i h_j \rangle'$. Тензор $\langle h_i \partial_j h_j \rangle^0$ не отличается от выписанного в предыдущем разделе, а в $\langle u_i \partial_j u_j \rangle^0$ появляются дополнительные члены:

$$\begin{aligned} \langle u_i \partial_j u_j \rangle^0 &= \frac{1}{6} \langle u^2 \rangle^0 \left[\delta_{ij} \lambda_j + \frac{1}{2} (\lambda_j \delta_{if} - \lambda_i \delta_{jf}) \right] + \\ &+ \frac{1}{6} \langle \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u} \rangle^0 \varepsilon_{ijj} + \frac{1}{6} \langle u^2 \rangle^0 (\delta_{ij} \partial_j \rho - \delta_{jj} \partial_i \rho) \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Дополнительными являются как раз последние члены, содержащие $\partial_i \rho$. Подставим выражения (4.45) в усредненные уравнения, получим систему, аналогичную (4.41), которую удобно записать в несколько другом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho V_i + \partial_j \rho V_i V_j + \partial_j \langle p \rangle + \partial_j \pi_{ij}(\mathbf{B}) &= \\ = -\partial_i p_T + \partial_j \chi_{ij} + \partial_i \partial_j \tau p_T V_j, & \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \operatorname{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}] = -\operatorname{rot} D_T' \operatorname{rot} \mathbf{B} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} D_T'' \mathbf{B} + & \\ + \operatorname{rot} [\mathbf{V}_\rho \mathbf{B}] + \operatorname{rot} (\alpha + \beta_1) \mathbf{B}. & \end{aligned} \quad (4.46)$$

Выпишем введенный тензор турбулентных напряжений χ_{ij} и другие новые обозначения:

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= \eta_T (\partial_i V_j + \partial_j V_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{V}) + \delta_{ij} \xi_T \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ \eta_T &= \frac{1}{3} \rho \tau \left(\frac{2}{5} \langle u^2 \rangle^0 + \frac{1}{4\pi\rho} \langle h^2 \rangle^0 \right), \\ \xi_T &= \frac{1}{3} \rho \tau \left(\frac{2}{3} \langle u^2 \rangle^0 + \frac{1}{6} \frac{1}{4\pi\rho} \langle h^2 \rangle^0 \right), \\ \mathbf{V}_\rho &= \frac{1}{6} \frac{\tau}{4\pi\rho^2} \langle h^2 \rangle^0 \partial \rho. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Отсюда видно, что турбулентность приводит к появлению пульсационного давления p_T (по порядку величины оно совпадает с плотностью энергии пульсаций) и тензору вязких напряжений, определяемому турбулентными аналогами первой и второй вязкостей.

Система (4.46) является общей, из нее в частном случае следует система (4.41) при $\rho = \operatorname{const}$, система (4.21) при $\rho = \operatorname{const}$ и

$\langle u^2 \rangle^0 = \text{const.}$ $\langle h^2 \rangle^0 = \text{const.}$ Она описывает реакцию квазитропной турбулентности на крупномасштабные поля. Квазиизотропная — это означает, что турбулентность не является по существу анизотропной, т. е. в ней нет выделенных направлений. Тем не менее градиенты плотности и среднеквадратичных флюктуаций являются векторами, наличие этих векторов приводит к вынужденной слабой анизотропии. Но эта анизотропия минимальная: невозможно создать чисто изотропное соленоидальное поле, такое, что $\nabla \langle v^2 \rangle \neq 0$. Невозможно также создать строго изотропное и однородное поле v , такое, что $\text{div } \rho v = 0$, ρ зависит от координат. Поэтому мы говорим «квазиизотропное» поле, анизотропия является, естественно, присущей данному полю.

Перенос поля в неоднородной среде. Система (4.46) описывает перенос поля из-за диамагнитного и парамагнитного эффектов, если D_T'' в (4.46) зависит от координат. Рассмотрим эффект переноса, связанный только с градиентом плотности среды. Для этого считаем, что пульсационные поля удовлетворяют условию полного равномерного распределения, в (4.2) полагаем $\delta = 0$ и тогда $D_T'' = 0$. Теперь мы можем увидеть эффекты переноса, связанные с градиентом плотности, в чистом виде. Согласно (4.47) здесь появляется поток крупномасштабного поля со скоростью

$$V_D = \frac{1}{6} \tau \langle u^2 \rangle^0 \nabla \rho \frac{1}{\rho}. \quad (4.48)$$

Уравнения электродинамики могут быть выписаны при $\langle u^2 \rangle = \text{const}$ и будут иметь вид, аналогичный (4.42), где

$$\sigma_T = \sigma / (1 + R_m') \mu_T, \quad \mu_T = (\rho / \rho_0)^{1/2}. \quad (4.49)$$

Здесь оказалось удобным ввести произвольную константу ρ_0 с размерностью плотности. Целесообразно считать ρ_0 совпадающей с минимальной плотностью во всей системе.

Главный здесь результат — вывод скорости переноса поля (4.48). Напомним, что в кинематическом приближении неоднородность плотности не вызывала результирующего потока в изотропной турбулентности. Для понимания процесса переноса поля в нелинейном случае обратимся опять к гл. III, подразд. 12 (см. рис. 3.1 и 3.2). Напомним, что на этих рисунках плотность убывает с ростом x . В кинематической постановке магнитное поле, лежащее в плоскости XU , переносится в направлении $-\nabla \rho / \rho$, а поле, параллельное оси z , — в обратном направлении ($\nabla \rho / \rho$). Анализ электромагнитной силы (теперь уже в нелинейной задаче) здесь проводится точно так же, как в предыдущем пункте. Результат следующий: электромагнитная сила вызывает перенос поля, лежащего в плоскости XU , в направлении $\nabla \rho / \rho$, т. е. влево. На магнитное поле, параллельное оси z , электромагнитная сила не сказывается (см. предыдущий пункт). Поясним это подробнее. Электромагнитная сила сводится к добавочному давлению (см. гл. II, подразд. 3) — магнитному. В данном случае магнитное поле B слабое, это означает, что энергия его мала по сравнению с кинетиче-

ской энергией пульсации, а последняя мала по сравнению с тепловой. Поэтому вклад магнитного давления в обычное пренебрежимо мало. Итак, электромагнитная сила не вызывает потока поля, параллельного оси z .

В целом мы имеем такую картину. Поток поля, лежащего в плоскости XU , который возникает в кинематическом приближении (в направлении — $\nabla\rho/\rho$), компенсируется потоком в обратном направлении из-за действия электромагнитной силы. Что касается поля, параллельного оси z , то оно переносится так же, как в кинематическом подходе (электромагнитная сила не сказывается). В результате остается только один (последний) поток — в направлении $\nabla\rho/\rho$. Очевидно, что и в общем трехмерном случае поток в направлении $\nabla\rho/\rho$ будет преобладать над противоположным, в результате чего и будет иметь место общий поток в этом направлении, как это и отражено в выражении (4.48).

Здесь уместно подытожить все нелинейные эффекты, связанные с неоднородностью. Результаты можно сформулировать следующим образом. 1. Электромагнитная сила, т. е. нелинейность, действует обратно кинематическому подходу: она старается подавить те эффекты, которые возникают в линейном подходе. Следовательно, она создает потоки, обратные линейным. Это естественно. 2. Электромагнитная сила действует только через искривление силовых линий. Движение, не искривляющее силовые линии, не подвергается обратному действию из-за нелинейных эффектов, а потому остается в конце концов тот поток, который был предсказан кинематическим подходом.

В подтверждение первого тезиса напомним, что турбулентность при $\nabla \langle v^2 \rangle \neq 0$ создает диамагнитный эффект для поля, лежащего в плоскости XU , а нелинейность — обратный, т. е. парамагнитный эффект. При $\nabla\rho \neq 0$ турбулентность в линейном приближении вызывает поток этого поля в направлении — $\nabla\rho/\rho$, в нелинейном — в обратном. В результате при наличии равномерного распределения кинетических и магнитных пульсаций результирующий поток этого поля обращается в нуль. Подтверждением второго тезиса является поведение поля, параллельного оси z . Движение не искривляет силовых линий поля. В кинематической постановке при $\nabla \langle v^2 \rangle \neq 0$ диамагнитный эффект отсутствует, при $\nabla\rho \neq 0$ имеется поток в направлении $\nabla\rho/\rho$. Нелинейность не сказывается на этих результатах, и суммарный поток остается в этом же направлении.

Обсуждение астрофизических приложений. Поток поля (4.48) направлен на дно конвективной зоны Солнца, где плотность на пять-шесть порядков больше поверхностной. Ввиду такого большого перепада плотностей поток (4.48) является чрезвычайно интенсивным. Известно, что высота однородной атмосферы, т. е. $(\nabla\rho/\rho)^{-1}$, для солнечной конвективной зоны почти совпадает с размером конвективной ячейки ($l\nabla\rho/\rho \approx 1$). Учитывая, что $\tau = l(\langle u^2 \rangle)^{-1/2}$, имеем в этом случае $V_D \approx \langle u^2 \rangle^{1/2}$. Это есть максимально возможный поток, ибо в данном случае среднеквадратич-

ная скорость является наибольшей в задаче. Напомним, что в кинематической постановке задачи поток из-за градиента плотности появляется только при наличии избранного направления анизотропии, дающей в выражение (4.48) малый параметр, характеризующий меру анизотропии.

Для описания солнечного ветра тоже представит интерес учет потока (4.48), ввиду того что плотность в нем меняется довольно существенно. Более важным является учет пульсационного давления. Приведем некоторые оценки. Параметры D_T , η_T/ρ , ξ_T/ρ являются величинами одного порядка. Принимая для солнечного ветра $u \approx 10^7$ см/с, $l = 10^{11}$ см, найдем, что $D_T \approx 10^{18}$ см²/с. Для конвективной зоны Солнца $u \approx 10^4$ см/с, $l = 3 \cdot 10^9$ см и $D_T \approx 3 \cdot 10^{13}$ см²/с.

Приведем главные (линейные и нелинейные) эффекты, которые следует учитывать при расчете магнитных полей в солнечной конвективной зоне. Общее уравнение выписано в (4.46) — второе уравнение. Поле \mathbf{V} соответствует дифференциальному вращению. Это самый сильный эффект. Дальше по степени интенсивности идет поток поля из-за градиента плотности (4.48), далее — α - и β -эффекты, без которых невозможна регенерация поля. Напомним, что согласно подразд. 6 генерация может происходить даже без α -эффекта, только за счет β -эффекта, и β -эффект является сравнимым по интенсивности в общем случае с α -эффектом. Наконец, турбулентная диффузия — это самый слабый эффект.

Наметим программу расчета конвективной зоны Солнца с учетом магнитных полей. Прежде всего необходимо провести расчет основной МГД-турбулентности (т. е. не возмущенной крупномасштабными полями) по схеме, изложенной в подразд. 4. В уравнениях необходимо учитывать источник турбулентности — конвективную неустойчивость, которая войдет в уравнение в виде внешних сил. Наиболее существенным моментом здесь является учет неоднородности плотности, который приведет к появлению естественного размера конвективных ячеек. Расчет должен проводиться в согласии с моделью конвективной зоны, полный расчет есть самосогласованный расчет модели конвективной зоны с учетом диффузионного приближения (см. подразд. 3, 4). Вторым этапом является расчет крупномасштабных полей, как это излагалось в подразд. 5, 6 и в данном. Учет кориолисовой силы дает возможность получить дифференциальное вращение Солнца. Действием крупномасштабного магнитного поля на дифференциальное вращение можно пренебречь в первом приближении. Тогда все параметры, входящие в уравнение для \mathbf{V} , станут известными: коэффициенты диффузии и переноса получаются из основной турбулентности, дифференциальное вращение уже задано, α -эффект определяется тоже в диффузионном приближении при известном градиенте плотности и угловой скорости, зависящей от координат. Наконец, для β_1 имеется уравнение, выписанное в подразд. 6. На этом этапе можно проводить расчет крупномасштабных магнитных полей, а значит, и солнечного цикла.

Интересное приложение эффекта турбулентной вязкости χ_T находят при описании дисковой аккреции газа на черную дыру. Единственно известным способом обнаружения черной дыры является детектирование излучения падающей на черную дыру плазмы. Гравитационная энергия падающей плазмы превращается в тепловую и излучается. Однако падающий газ имеет изначальный угловой момент, препятствующий падению. Для выноса момента в периферийную область необходимо ввести турбулентную вязкость, так как обычной газокинетической недостаточно. В статье [94] рассматривается турбулентная вязкость, связанная с магнитными неоднородностями. При этом не учитываются флуктуации скорости, т. е. рассматривается вязкость, возникшая из-за максвелловского тензора напряжений. Как говорилось в подразд. 2, магнитные неоднородности должны возбуждать пульсации скорости, и в конце концов будет иметь место равномерное распределение энергий магнитных и кинематических пульсаций. Напомним, что конечное время памяти τ (входящее в χ_T) связано с нелинейными взаимодействиями пульсаций. В принципе энергия магнитного поля может превышать энергию движений (см. подразд. 2). Более того, можно представить себе магнитные неоднородности, у которых электромагнитная сила чисто потенциальная и компенсируется давлением. При этом пульсации скорости не возникают. В упомянутой работе конечное время памяти, т. е. конечное время жизни неоднородностей, связано с пересоединением силовых линий в X-точках. Но существование ансамбля магнитных неоднородностей с чисто потенциальной электромагнитной силой нам представляется искусственным.

Надо сказать, что в астрофизике и геофизике используются и другие подходы в решении задач нелинейной теории динамо. Их можно разбить на два класса: строгие и эвристические. Строгий подход основан на изучении нелинейного взаимодействия волн во вращающейся среде при наличии магнитного поля (см. [95]). Этот подход ближе к теории динамо в слабопроводящей среде и имеет непосредственное отношение к геодинамо [2]. Генерация магнитного поля Солнца гигантскими конвективными ячейками в принципе возможна (см. гл. I, подразд. 7). Таков процесс с учетом электромагнитных сил, действующих на движение, рассмотрен в работе [96]. При этом проводимость считалась низкой ($R_m' \approx 1$), она определялась турбулентными движениями конвективных ячеек меньших размеров, чем рассматриваемые гигантские. Полный анализ уравнений МГД и численное решение с помощью разложения на галеркинские моды проведены в [97]. В этой работе рассматривается конвекция во вращающейся среде при наличии магнитного поля. Указаны условия генерации и обратной реакции поля на движение. Эвристический подход привлекается в астрофизике. Основные идеи такого подхода сводятся к следующему. Можно ожидать, что электромагнитные силы ослабят α -эффект. В работе [98] считается, что α -эффект выключается, когда кориолисова сила (вызывающая гиротропность,

а значит α -эффект) компенсируется электромагнитной силой. Нам хотелось бы отметить, что согласно результатам подразд. 6 действительно нелинейность компенсирует α -эффект. В последовательной постановке задачи получается, что β -эффект компенсирует α -эффект. Другой способ учета электромагнитной силы заключается в определении течений, вызванных крупномасштабной составляющей электромагнитной силы, и реакции этого течения на магнитное поле [99]. Это эквивалентно учету силы $d_j \pi_{ij} (B)$ в уравнении движения (4.21).

Новый подход в нелинейной теории генерации магнитных полей звезд предложен в работе [55]. Известно, что тороидальное поле, генерируемое в конвективной зоне, обладает плавучестью (обнаруженной Паркером, см., например, [66]). Магнитная трубка всплывает и выходит тем самым из области генерации (в уравнении движения (4.21) архимедова сила есть комбинация электромагнитной и крупномасштабной силы $\nabla p/\rho$). Ясно, что выход поля из динамо-области означает выключение генерации. Авторы [55] предложили приравнять время, необходимое для выхода поля, времени нарастания (обратному инкременту) для определения установившегося поля. Амплитуда установившегося поля при этом действительно определяется, поскольку время выхода поля зависит от амплитуды, и плавучесть является существенно нелинейным процессом. В результате получается связь между угловой скоростью звезды и ее магнитным полем (отметим, что в подразд. 6 получена такая связь при учете β -эффекта, см., например, (4.36)). Новейшие наблюдательные данные [100] подтверждают эту связь. Интересный вывод из наблюдений заключается в существовании двух типов звезд, отражающих два типа связи между угловой скоростью и магнитным полем. Авторы [55] связывают эти два типа с двумя режимами генерации магнитных полей. В одном режиме генерируется несколько магнитных мод, в другом — только одна мода. На наш взгляд, два режима могут быть связаны с двумя возможностями динамо: генерацией поля α -эффектом и генерацией поля β -эффектом (см. подразд. 6). По мнению Паркера, два режима — α -эффект и механизм динамо-эжектора магнитного потока (см. гл. II, подразд. 10).

8. О природе крупномасштабных полей на Солнце

Магнитные поля на поверхности Солнца обладают целым спектром масштабов. Удобно проводить классификацию этих полей, начиная от самых крупных масштабов и постепенно переходить ко все более и более мелким. Надо сказать, что поля разных масштабов сравнительно легко выделяются на поверхности. Что касается их глубинной стратификации, то, во-первых, об этом известно гораздо меньше, во-вторых, выделение масштабов здесь уже далеко не столь четкое. Можно сразу сказать, что все характерные размеры полей на поверхности Солнца (за исключением

размеров совсем уж мелкомасштабных полей, находящихся на пределе разрешения современных инструментов) сравнимы с толщиной конвективной зоны, а некоторые превышают ее.

Проведем классификацию полей по масштабам, начиная от самых крупных и кончая мелкими.

1. Глобальные поля, меняющиеся сравнительно медленно и описываемые наиболее низкими модами сферических гармоник (размер 10^{11} см).

2. Гигантские поля ($3 \cdot 10^{10}$ — 10^{11} см).

3. Поля супергранул ($3 \cdot 10^9$ см).

4. Поля гранул ($3 \cdot 10^7$ см).

5. Сверхтонкая структура (меньше 10^7 см).

Глобальные поля. Размер конвективных ячеек в глубине конвективной зоны Солнца сравним с толщиной самой зоны, а поэтому и с масштабом глобальных полей. С другой стороны, горизонтальные размеры магнитных полей гораздо больше размеров ячеек. Поэтому глобальные поля на Солнце представляют собой типичный пример полей промежуточного масштаба (см. гл. II, подразд. 10). Но эти поля чаще всего трактуются как крупномасштабные. Это связано с тем, что динамика последних описывается сравнительно простыми уравнениями (см. гл. II, подразд. 1, 9).

Существуют два подхода для описания глобальных полей: подход, в котором масштаб глобального поля четко выделяется и все движения на Солнце рассматриваются как «турбулентность», и подход, в котором глобальные поля взаимодействуют с гигантскими ячейками. О втором подходе мы упоминали в гл. I, подразд. 6, 7, и в подразд. 7 настоящей главы. Речь идет при этом о генерации магнитного поля простым полем скорости типа дифференциально вращающегося цилиндра или конвективной ячейки при промежуточных числах $R'_m \gtrsim 1$. При этом мелкомасштабные движения служат для перенормировки коэффициента диффузии, поэтому эффективные числа R'_m и получаются не слишком большими. Этот подход, однако, разработан меньше первого. Кроме того, магнитные поля необходимо рассматривать в общей картине, учитывающей динамику движений. В частности, необходимо в этой же картине получить дифференциальное вращение Солнца. Как говорилось в гл. II, подразд. 9, существуют два подхода для описания дифференциального вращения, в точности эквивалентных двум подходам, описывающим глобальные поля. Но там же отмечалось, что наблюдательные данные и теоретические соображения скорее свидетельствуют в пользу первого подхода, описывающего дифференциальное вращение, возникающее на фоне «турбулентности» — всех движений на Солнце.

Обратимся поэтому к первому подходу. Объяснение природы глобальных полей следует искать во взаимодействии этих полей с конвективными движениями. Ввиду большого числа Рейнольдса конвекция на Солнце носит турбулентный характер. Это выражается в том, что время жизни ячеек (которые на поверхности

проявляются как гранулы и супергранулы) оказывается порядка времени поворота ячеек. Время, за которое изменяется глобальное поле, много больше времени поворота ячеек, и поэтому допустимы усреднение по ячейкам и концепция крупномасштабности полей (см. гл. II). Ввиду действия мелкомасштабного динамо (см. гл. III) в конвективной зоне генерируются пульсационные магнитные поля, масштабы которых сравнимы с масштабами ячеек. Их энергия сравнима с энергией кинетических движений (см. подразд. 2), отсюда следует учитывать их обратное действие на поле скоростей и на саму генерацию поля.

Общие нелинейные уравнения динамики поля выписаны в подразд. 7 (см. (4.46)). Там же изложены главные нелинейные эффекты, которые должны приниматься во внимание в первую очередь: перенос поля из-за градиента плотности (который весьма значителен в солнечной конвективной зоне) и β -эффект. Глобальные поля ответственны за солнечный цикл.

Дальнейшее описание глобального поля удобно проводить в сферической или цилиндрической системе, для которой ось z проходит вдоль оси вращения Солнца. Все коэффициенты в (4.46) не зависят от долготы, следовательно, если начальное поле осесимметричное, то оно и будет оставаться осесимметричным в процессе эволюции. Первоначально модель солнечного цикла строилась именно как осесимметричная [6]. В дальнейшем, однако, стало ясно, что эта модель не адекватна наблюдательным данным. Прежде всего имеется в виду секторная структура межпланетного магнитного поля и явно не симметричное положение корональных дыр. В связи с этим Стикс [63] разрабатывал неосесимметричную модель цикла. Представим поле в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(r, \theta, t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_m(r, \theta, t) \exp im\varphi.$$

Если бы все коэффициенты \mathbf{V}_m равнялись нулю, то мы имели бы дело с осевой симметрией. Как известно, поле \mathbf{V}_0 представляет сумму полоидального поля (наинизшей гармоникой которого является диполь) и тороидального. Последнее генерируется в глубине конвективной зоны и выходит на поверхность в виде солнечных пятен. Однако, как сказано выше, осесимметричная картина не является полной. В упомянутой работе [63] рассматривалась мода с $|m| \geq 1$, т. е. выписаны и решены численно уравнения для коэффициентов \mathbf{V}_m .

Ввиду осевой симметрии коэффициентов в (4.46) моды с различными m в линейном приближении не взаимодействуют. Иначе говоря, если положить $\beta_1 = 0$ (чем и достигается линейность уравнения для \mathbf{V}), то решения уравнений для коэффициентов \mathbf{V}_m независимы для каждого m . Независимость этих коэффициентов означает, что осесимметричная и неосесимметричная составляющие не связаны между собой. Экспериментальные данные, однако, не подтверждают эту картину. Анализ данных межпланетного магнит-

ного поля и солнечных пятен [101, 102] показал, что вектор дипольной составляющей глобального поля поворачивается в течение цикла. В определенные периоды поле, симметричное относительно оси вращения, исчезает и остается диполь, вектор которого лежит на экваторе. На языке сферических гармоник это означает, что амплитуда осесимметричной моды ($m = 0$) меняется синхронно с изменением мод с $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Сказанное выше приводит к заключению: динамика глобального магнитного поля, т. е. солнечный цикл, должна рассматриваться, во-первых, как задача не осесимметричная, и, во-вторых, как нелинейная. Простейшая постановка задачи: учесть лишь осесимметричную моду с $m = \pm 1$ (простейший вариант вычислений по методу Галеркина). Выпишем уравнения для \mathbf{V}_m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_m &= \text{rot } \alpha \mathbf{V}_m + \text{rot } [\mathbf{V} \mathbf{B}_m] + D_T \Delta \mathbf{V}_m + \sum_{p+j=m} \text{rot } \beta_p \mathbf{V}_j, \\ \frac{\partial}{\partial t} \beta_m &= -\text{div } \mathbf{V} \beta_m + \frac{4}{3} \sum_{p+j=m} [\mathbf{V}_A^{(p)} \text{rot } \mathbf{V}_A^{(j)} - \\ &- \alpha D_T^{-1} \mathbf{V}_A^{(p)} \mathbf{V}_A^{(j)}] - \frac{4}{3} \sum_{p+j+k=m} \beta_p \mathbf{V}_A^{(j)} \mathbf{V}_A^{(k)} D_T^{-1}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_A^{(m)} = \mathbf{V}_m (4\pi r)^{-1/2}$. Система (4.50) должна решаться численно при учете по меньшей мере только нижних гармоник ($m = \pm 1$ и нижних сферических гармоник по координате θ). На данном этапе анализ системы (4.50) дает лишь следующие качественные выводы.

1. Гармоники с $m = 0$ и $m = \pm 1$ действительно взаимодействуют, взаимодействие нелинейное.

2. Неосесимметричная часть не должна обращаться в нуль (в противном случае решения уже не смогут выйти из симметричного режима). Иначе говоря, ось диполя не должна стать строго параллельной оси вращения (именно такая ситуация и наблюдается на Солнце [101, 102]).

3. Можно ожидать, что нелинейные поправки не изменят качественно динамическим образом симметричную составляющую поля или цикл должен проходить, в основных чертах, известным образом: дипольная составляющая полоидального поля перекачивается в тороидальное, и наоборот. На стадии активности, когда остается только тороидальное поле, на поверхности Солнца поля будут описываться только несимметричной составляющей, т. е. вектор диполя лежит на экваторе. Это соответствует наблюдениям.

4. На этой же стадии, когда остается одна тороидальная составляющая, роль нелинейных эффектов резко усилена. Дело в том, что напряженность тороидального поля в 10^3 раз превышает напряженность полоидального. Неудивительно поэтому, что именно на этой стадии интенсивность несимметричной моды (связанной с осесимметричной только нелинейностью) максимальна.

5. Возможен переход от одного режима генерации (α -эффекта) другому (β -эффекту). Выше обсуждалась такая возможность для разных звезд. Здесь же такой переход может осуществляться в одном и том же небесном теле — Солнце, и приводить к долгопериодическим вариациям. Об этом мы будем говорить в следующем пункте.

С глобальными полями тесно связаны корональные дыры — области пониженной плотности короны. Считается, что последние возникают в областях открытых конфигураций магнитных полей, где истечение плазмы особенно интенсивно, что и приводит к снижению плотности в этих областях. Наиболее естественные места их возникновения — области магнитных полюсов. Связывая корональные дыры с глобальными полями, мы тем самым объясняем удивительный факт их долгого существования. Это действительно удивительно, ибо дифференциальное вращение должно было бы довольно быстро их «растачить». Это обстоятельство использовалось даже для того, чтобы выдвинуть аргумент против наличия дифференциального по глубине вращения на Солнце. Мы даем другую интерпретацию долгого времени жизни корональных дыр. Время жизни дыры связано со временем существования открытой конфигурации и в конечном счете со временем существования самого глобального поля. Время определяется периодом цикла и велико. Это есть максимально возможное время жизни дыры. Поле открытой конфигурации, строго говоря, уже не вморожено в движущуюся плазму ввиду действия турбулентной диффузии D_T , и поэтому оно не подвержено дифференциальному вращению. С другой стороны, время жизни дыры может оказаться меньше периода цикла, что связано с появлением активных областей, приводящих к изменению магнитного поля в короне и превращению открытой конфигурации в закрытую.

Цикличность и сбой фазы цикла. Солнечная цикличность была обнаружена в прошлом веке по наблюдениям пятен. В начале нашего столетия стали наблюдать магнитные поля. Выяснилось, что полный период солнечного цикла равен двадцати двум годам. Две половины цикла слабо различимы, если не учитывать полярность магнитных полей. Поэтому-то до тех пор, пока не стали наблюдать магнитные поля, цикл считался одиннадцатилетним. Кроме двадцатидвухлетнего цикла, имеются и долгопериодические вариации (80 лет).

В последние годы уделяется большое внимание долгопериодическим вариациям в связи с проблемой так называемого минимума Маундера, длившегося с 1645 по 1715 г. [103]. В это время почти не наблюдалось солнечных пятен, резкое снижение активности в то время подтверждается другими косвенными данными. Для объяснения этого удивительного явления Догелем и Сыроватским [104] была выдвинута идея о стохастическом сбое фаз, связанном со свойствами странного аттрактора (см. гл. II, подразд. 3). (Подобное изложение идеи Догеля и Сыроватского см. в [105]).

В этой связи отметим следующее. Удивительные свойства

странного аттрактора связаны с появлением стохастичности в маломодовом режиме. Сплошная среда не является маломодовой. В частности, в системе уравнений (4.50) мы не вправе оставлять малое число гармоник галеркинского приближения. Поэтому, строго говоря, стохастическое поведение солнечных колебаний не связано со странным аттрактором. Тем не менее интуитивно ясно, что крупномасштабные поля не должны обладать большим числом степеней свободы. Поэтому стохастическое поведение глобальных полей (если оно действительно имеется) все-таки представляется удивительным.

Существенный сдвиг в понимании этой проблемы был осуществлен Куклиным [106], который проанализировал индекс солнечной активности— числа Вольфа (взвешенное число пятен). Обозначим числа Вольфа буквой W . Величина W показывает одиннадцатилетнюю цикличность. Воспользуемся преобразованием Гильберта

$$\widetilde{W}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(s)}{t-s} ds.$$

Теперь получена новая переменная величина $\widetilde{W}(t)$. Для выяснения ее физического смысла напомним, что если

$$W(t) = \frac{\text{Re}}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \exp i\omega t d\omega,$$

то

$$\widetilde{W}(t) = \frac{\text{Re}}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \exp i \frac{\pi}{2} \exp i\omega t d\omega.$$

Иначе говоря, преобразование Гильберта поворачивает комплексную фурье-амплитуду процесса на угол $\pi/2$, оставляя модуль неизменным, или сдвигает фазу на $\pi/2$ на всех частотах. Теперь процесс $W(t)$ можно представить в виде

$$W(t) = R(t) \cos \varphi(t), \quad \widetilde{W}(t) = R(t) \sin \varphi(t),$$

$$\text{tg } \varphi(t) = \widetilde{W}(t)/W_1(t), \quad R^2(t) = W^2(t) + \widetilde{W}^2(t).$$

Таким образом, преобразование Гильберта дает возможность выявить мгновенную фазу $\varphi(t)$ процесса. Если бы колебания происходили строго периодически, то фаза $\varphi(t)$ росла бы монотонно на интервале от $-\pi$ до π в течение одного периода солнечного цикла. Медленный ход фазы, вероятно, не представит особого интереса с точки зрения стохастичности (и интересен для выявления долгопериодических вариаций). Куклиным [106] был обнаружен сбой фаз (или «фазовая катастрофа», как называет ее автор) во время минимума Маундера. Не меньший интерес представляет обнаруженный сбой фаз с 1790 по 1830 г. (см. рис. 4.2).

На наш взгляд, удивительное поведение фазы цикла, так по-

хожее на странный аттрактор, может быть связано с переходом с обычного режима генерации поля на другой (с режима α -эффекта на режим β -эффекта). Проверить это утверждение можно с помощью численного решения системы (4.50) с учетом минимального количества мод. Другой возможный режим странного аттрактора (в применении к интерпретации изменения знака магнитного поля Земли) был рассмотрен в [107]. Магнитное поле в этой работе влияет на дифференциальное вращение.

Гигантские поля и поля супергранул. Возбуждение и существование этих полей обязано генерации поля движениями соот-

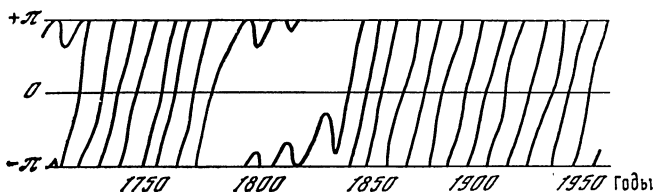


Рис. 4.2.
Мгновенная фаза ряда чисел Вольфа

ветствующих масштабов, т. е. тем, что мы называем мелкомасштабным динамо. Иначе говоря, поле гигантского масштаба l_g возбуждается движением такого же масштаба. Время возбуждения равно l_g/v_g , v_g — среднеквадратичная скорость. Наблюдения до сих пор не дали оценку для величины v_g . Последняя определяется обычно из времени жизни гигантского поля t_g :

$$v_g = l_g/t_g = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с},$$

(мы учли, что $t_g = 10^7$ с). Магнитное поле, соответствующее равномерному распределению магнитной и кинетической энергий, можно оценить как $H_g = 3$ [с ($\rho = 10^{-7}$ г/см³ для фотосферы)].

Но убедительных доказательств существования гигантских ячеек в настоящее время нет. Тем более что устойчивое положение корональных дыр, которое приписывают наличию ячеек, мы объяснили выше другим способом. Если их нет, то наличие гигантских полей естественно объяснить как результат диффузионного расплывания активной области. Поля солнечных пятен достигают значений порядка килогаусса при размере $3 \cdot 10^9$ см (сравнимом с размером супергранулы l_{sg}). Простой распад и диффузионное расплывание дадут поле, в $(l_g/l_{sg})^2$ раз меньшее, чем поле пятна (расплывание происходит по поверхности, поэтому величина l_g/l_{sg} берется в квадрате). При этом получаем поля на размере l_g порядка 1—3 Гс. К такому же результату мы придем, если будем рассматривать поля гигантского масштаба как крупномасштабную флуктуацию полей активной области. Действительно, случайное

преобладание поля одного пятна при усреднении по площади, примерно равной l_g^2 , даст среднее поле, в $(l_g/l_{sg})^2$ раз меньше, чем поле самого пятна. Возможность возбуждения глобальных полей гигантскими ячейками (если они существуют) мы обсуждали в начале подраздела.

Поля супергранул несомненно возбуждаются механизмом мелкомасштабного динамо, поскольку супергранулы существуют не как магнитные образования (как гигантские ячейки), а скорее как выделенное движение масштаба $l_{sg} = 3 \cdot 10^9$ см. Характерной скорости $v_{sg} = 3 \cdot 10^1$ см/с соответствует равномерно распределенное поле $H_{sg1} = 10$ Гс. Время жизни супергранулы $t_{sg} = 6 \cdot 10^5$ с хорошо соответствует времени поворота ячейки l_{sg}/v_{sg} . Описанная картина очень грубая. В действительности вертикальные размеры супергранулы в 4 раза меньше горизонтальных. Магнитное поле на полях супергранулы сконцентрировано до напряженностей, на порядок превышающих среднюю. Но мы не будем вдаваться в детальное описание супергранул.

Поля гранул и сверхтонкая структура. Генерация полей гранул осуществляется мелкомасштабным динамо. Характерные скорости $v_{gr} = 2 \cdot 10^5$ см/с, время жизни $t_{gr} = 5 \cdot 10^2$ с. Магнитное поле равномерного распределения $H_{gr} = 100$ Гс. Примерно такие среднеквадратичные поля наблюдаются в гранулах, если учитывать межгранульные более концентрированные поля. Энергия такого поля на четыре порядка превышает энергию глобального (напряженность последнего порядка одного гаусса). Это соотношение энергий является экспериментальным подтверждением теории мелкомасштабного динамо. Действительно, как неоднократно говорилось выше (см., например, гл. III, подразд. 1), при отсутствии мелкомасштабного динамо энергия пульсаций не превосходила бы энергию среднего крупномасштабного поля.

Наконец, сверхтонкая структура (размеры меньше 10^7 см) нас будет интересовать с точки зрения работы динамо-механизмов. Сверхтонкая структура находится за пределами разрешающей способности современных инструментов и обнаружена по косвенным данным.

Плотность энергии магнитного поля в сверхтонких образованиях превышает плотность энергии каких-либо движений в фотосфере и, по-видимому, равна тепловой энергии. Этот удивительный факт вызвал большую дискуссию. Движения плазмы могут генерировать магнитные поля с почти потенциальной электромагнитной силой [108]. При этом последняя компенсируется давлением и поэтому не вызывает обратной реакции на движение. Таким образом, может происходить генерация поля выше уровня равномерного распределения. Другая возможная причина возникновения столь сильных полей — выход их из глубины конвективной зоны, где плотность кинетической энергии гораздо выше фотосферной. В любом случае конфигурация сверхтонкой структуры магнитного поля должна представлять весьма мелкомасштабные образования,

не дающие вклада в среднее крупномасштабное поле. Именно такого типа поля должны возбуждаться механизмом, указанным в [108]. В работе [109] высказано предположение, что тонкоструктурные конфигурации представляют собой перемежаемости в турбулентной среде (см. о перемежаемости гл. II, подразд. 3). На наш взгляд, сверхтонкая структура, если она существует, не связана с перемежаемостью. Дело в том, что перемежаемость означает наличие сильных градиентов полей, а не концентрацию полей в малых областях, как это имеет место со сверхтонкой структурой. Вопрос о перемежаемости при наличии магнитных полей обсуждался в подразд. 2. Там мы тоже видели, что перемежаемость может привести лишь к более крутому спектру пульсаций (что эквивалентно возрастанию градиентов полей), а не к существованию супермелкомасштабных образований.

Принимая факт существенно малого масштаба сверхтонкой структуры и то, что она не дает вклад в общий магнитный поток, мы приходим к выводу, что сверхтонкая структура слабо сказывается на динамике крупномасштабных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. *Брагинский С. И.* Теоретические исследования геомагнитного динамо.— В кн.: Итоги науки и техники. Геомагнетизм и высокие слои атмосферы. М.: ВИНТИ, 1980, т. 5, с. 5—95.
3. *Moffatt H. K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids: Cambridge univ. press., 1978. 343 p.
4. *Соурд А. М., Робертс П. Х.* Современное состояние МГД-динамо.— Магнитная гидродинамика. 1976, № 1, с. 3—51.
5. *Busse F. H.* Theory of planetary dynamos.— In: Solar system plasma physics/Eds. Ch. Kennel, L. Lanzerotti, E. Parker.: North-Holland, 1979, p. 293—317.
6. *Parker E. N.* Hydromagnetic-dynamo models.— *Astrophys. J.*, 1955, 122, p. 293—303.
7. *Kraichnan R. H.* Consistency of the Alpha-effect turbulent dynamo.— *Phys. Rev. Lett.*, 1979, 42, p. 1677—1680.
8. *Kraichnan R. H., Nagarajan S.* Growth of turbulent magnetic fields.— *Phys. Fluids*, 1967, 10, p. 859—870.
9. *Новиков И. И.* Прикладная магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат, 1969. 360 с.
10. *Durney V. R.* The solar differential rotation...— In: Workshop on solar rotation/Eds. G. Belvedere, L. Paterno. Catania, 1978, p. 301—324.
11. *Дробышевский Э. М.* Результирующее значение инерционной ЭДС при термической конвекции во вращающейся плазме.— *ЖЭТФ*, 1972, 42, p. 1577—1585.
12. *Drobyshevski E. M., Yuferev V. S.* Topological pumping of magnetic flux by three-dimensional convection.— *J. Fluid Mech.*, 1974, 65, p. 33—44.
13. *Волков Т. Ф.* Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 3—80.
14. *Вайнштейн С. И.* Перестройка магнитного поля плазменными механизмами.— *УФН*, 1976, 120, с. 613—645.
15. *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б.* О происхождении магнитных полей в астрофизике.— *УФН*, 1972, 106, с. 431—457.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
17. *Вайнштейн С. И.* Задача о генерации магнитного поля при наличии акустической турбулентности.— *ДАН СССР*, 1970, 195, с. 793—796.
18. *Cowling T. D.* The magnetic field of sunspot.— *Month. Not. RAS*, 1934, 94, p. 39—42.
19. *Elsasser W. M.* Induction effects in terrestrial magnetism.— *Phys. Rev.*, 1946, 69, p. 106—116.
20. *Зельдович Я. Б.* Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости. *ЖЭТФ*, 1956, 31, с. 154—155.
21. *James R. W., Roberts P. H., Winch D. E.* The Cowling anti-dynamo theorem.— *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1980, 15, p. 149—160.
22. *Hide R.* Dynamo theorems.— *Ibid.*, 1979, 14, p. 183—186.
23. *Herzenberg A.* Geomagnetic dynamos.— *Philos. Trans. Roy. Soc. A*, 1958, 250, p. 543—585.

24. *Lortz D.* Exact solution of hydromagnetic dynamo problem.— *Plasma Phys.*, 1968, **10**, p. 967—972.
25. *Пономаренко Ю. Е.* К теории гидромагнитного динамо.— *ПМТФ*, 1973, № 6, с. 47—51.
26. *Гайлитис А. К., Фрейберг Я. Ж.* Расчет динамо-неустойчивости винтового потока: Препринт ЛАФИ-004. Рига: 1977. 48 с.
27. *Тверской Б. А.* К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей.— *Геомagnetизм и аэрономия*, 1966. **6**, с. 11—18.
28. *Roberts G. O.* Dynamo action of fluid motions with two dimensional periodicity.— *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1972, **A271**, p. 411—413.
29. *Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Магнитное поле в проводящей и в движущейся в двух измерениях.— *ЖЭТФ*, 1980, **78**, с. 98С—986.
30. *Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Helicity, linkage and dynamo action.— *Geophys. Astrophys., Fluid Dyn.*, 1980, **16**, p. 73—82.
31. *Брагинский С. И.* О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости.— *ЖЭТФ*, 1964, **47**, с. 1084—1098.
32. *Davies L.* Electromagnetic phenomena in cosmic physics/Ed. B. Lehnert.: Cambridge Univ. press, 1958, p. 27—32.
33. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
34. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— *ДАН СССР*, 1941, **30**, с. 299—303.
35. *Бэтчелор Дж. К.* Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 150 с.
36. *Kraichnan R. H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence.— *Rep. Progr. Phys.*, 1980, **43**, p. 547—619.
37. *Мирабель А. П., Монин А. С.* Двумерная турбулентность.— *Успехи механики*, 1979, **2**, с. 47—95.
38. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence.— *Communs Math. Phys.*, 1971, **20**, p. 167—192.
39. *Монин А. С.* О природе турбулентности.— *УФН*, 1978, **125**, с. 97—122.
40. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентность.— *УФН*, 1978, **125**, с. 123—167.
41. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
42. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720 с.
43. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* A calculation of the mean EMF in an electrically conducting fluid in turbulent motion.— *Ztschr. Naturforsch.*, 1966, **A21**, S. 369—376.
44. *Orszag S. A.* Analitical theories of turbulence.— *J. Fluid Mech.*, 1970, **41**, p. 363—386.
45. *Hide R.* The magnetic flux linkage of a moving medium: a theorem and geophysical applications: Prepr. meteorol. office. Bracknell. UK, 1981. 24 p.
46. *Вайнштейн С. И.* О генерации крупномасштабного магнитного поля турбулентной жидкостью.— *ЖЭТФ*, 1970, **58**, с. 153—159.
47. *Вайнштейн С. И.* К теории турбулентного динамо.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1978, **21**, с. 1803—1811.
48. *Вайнштейн С. И.* Точная немарковская модель турбулентного динамо.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1981, **24**, с. 172—178.
49. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Статистическая теория распространения света в турбулентной среде.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1972, **15**, с. 1433—1442.
50. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 639 с.
51. *Вайнштейн С. И.* Задача о магнитном поле в неоднородном турбулентном потоке.— *ПМТФ*, 1971, № 1, с. 12—18.

52. *Drobyshevski E. M.* Magnetic field transfer by two-dimensional convection and solar «semi-dynamo».— *Astrophys. and Space Sci.*, 1977, 46, p. 41—49.
53. *Вайнштейн С. И.* МГД-эффекты в турбулентной среде с неоднородной плотностью.— *Магнитная гидродинамика*, 1978, № 1, с. 45—50.
54. *Busse F. H., Minn S. W.* Spherical dynamos with anisotropic α -effect.— *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1979, 14, p. 167—181.
55. *Robinson R. D., Dyrney B. R.* On the generation of magnetic fields in late-type stars: Prepr. Sacramento Peak Observatory. Sunspot, USA, 1981, 13 p.
56. *Bisnovaty-Kogan G. S., Vainshtein S. I.* Generation of magnetic fields of rotating stars and quasars.— *Astrophys. Lett.*, 1971, 8, p. 151—152.
57. *Kraichnan R. H.* Diffusion of weak magnetic fields by isotropic turbulence.— *J. Fluid Mech.*, 1976, 75, p. 657—676.
58. *Rudiger G.* Reynolds stress and differential rotation.— *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1980, 16, p. 239—261.
59. *Durney B. R.* On theories of rotating convection zones: Prepr. Sacramento Peak Observatory. Sunspot, USA, 1980, 40 p.
60. *Гемлинг А. В., Тверский Б. А.* Теория солнечной активности.— *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, 1980, 44, с. 2561—2568.
61. *Ruzmaikin A. A., Vainshtein S. I.* The nature of mechanism of differential rotation of the Sun.— *Astrophys. and Space Sci.*, 1978, 59, p. 215—225.
62. *Kippenhahn R.* Differential rotation in stars with convective envelopes.— *Astrophys. J.*, 1963, 137, p. 664—670.
63. *Stix M.* Dynamo theory and the solar cycle.— In: *Basic mechanism of solar activity*/Ed. Bumba a. Klezek. Dordrecht (Holland): D. Reidel Publ. Co, 1976, p. 367—388.
64. *Parker E. N.* The flux ejection dynamo effect: The flux ejection dynamo with small diffusivity: I Basic properties; II illustrative examples: Prepr. Univ. Chicago, USA, 1981, 32 p. p. 42 p.
65. *Knobloch E.* Turbulent diffusion of magnetic fields.— *Astrophys. J.*, 1978, 225, p. 1050—1057.
66. *Parker E. N.* *Cosmical magnetic fields.* Oxford: Clarendon press, 1979, 200 p.
67. *Walder M., Deinzer W., Stix M.* Dynamo action associated with random waves in a rotating stratified fluid.— *J. Fluid. Mech.*, 1980, 96, p. 207—222.
68. *Moffatt H. K.* A self-consistent treatment of simple dynamo systems.— *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1979, 14, p. 147—166.
69. *Bondi H., Gold T.* On the generation of magnetism by fluid motion.— *Moth. Not. RAS*, 1950, 110, p. 607—611.
70. *Batchelor G. H.* On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion.— *Proc. Roy. Soc.*, 1950, A201, p. 405—420.
71. *Krause F.* Dynamo excitation by steady homogeneous isotropic mirror-symmetric turbulence.— In: *Dynamo-theory: Rep. of Intern. Workshop, KAPG, Alšovice: Czechosl. Akad. Sci.*, 1979, p. 20—22.
72. *Вайнштейн С. И.* Динамо мелкомасштабных полей.— *ЖЭТФ*, 1980, 79, с. 2175—2187.
73. *Голицын Г. С.* Флуктуация магнитного поля и плотности тока в турбулентных потоках слабопроводящей жидкости.— *ДАН СССР*, 1960, 132, с. 315—318.
74. *Mandelbrot B. B.* Intermittent turbulence in self-similar cascades.— *J. Fluid Mech.*, 1974, 62, p. 331—340.
75. *Вайнштейн С. И.* Динамо магнитного поля в космосе.— *УФН*, 1981, 134, с. 744—745.
76. *Вайнштейн С. И.* Генерация мелкомасштабного магнитного поля при умеренных магнитных числах Рейнольдса.— *Магнитная гидродинамика*, 1982, № 2, с. 3—14.

77. *Вайнштейн С. И.* «Антидинамо» — возможный механизм явлений, происходящих в нейтральных слоях магнитного поля.— ЖЭТФ, 1973, 65, с. 550—561.
78. *Пикельнер С. Б.* Основы космической электродинамики. М.: Наука, 1966. 407 с.
79. *Bevir M. K.* Possibility of electromagnetic self-excitation...— J. Brit. Nucl. Energy Soc., 1973, 12, p. 455—458.
80. *Leorat J., Pouquet A., Frisch U.* Fully developed MHD turbulence near critical magnetic Reynolds number: Prepr. Observatoire de Nice. Nice, France, 1980. 57 p.
81. *Вайнштейн С. И.* О нелинейной задаче турбулентного динамо.— ЖЭТФ, 1971, 61, с. 612—620.
82. *Kraichnan R.* Internal-range spectrum of hydromagnetic turbulence.— Phys. Fluids, 1965, 8, p. 1385—1387.
83. *Шафранов В. Д.* Электромагнитные волны в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, вып. 3, с. 7—140.
84. *Edwards S. F.* The statistical dynamics of homogeneous turbulence.— J. Fluid. Mech., 1964, 18, p. 239—273.
85. *Herring J. R.* Self-consistent field approach to turbulent theory.— Phys. Fluids, 1965, 8, p. 2219—2225.
86. *Frisch U., Lesieur M., Brissand A.* A Markovian random coupling model for turbulence.— J. Fluid Mech., 1974, 65, p. 145—152.
87. *Pouquet A., Frisch U., Leorat J.* Strong MHD turbulence and the nonlinear dynamo effect.— Ibid., 1976, 77, p. 321—354.
88. *Kraichnan R. H.* Hydrodynamic turbulence and the renormalization group: Repr. Dublin, New Hampshire, USA, 1981. 22 p.
89. *Афанасев Ю. В., Гамалий Е. Г., Лебо И. Г., Розанов В. Б.* Гидродинамическая неустойчивость и спонтанные магнитные поля в сферической лазерной капле.— ЖЭТФ, 1978, 74, с. 516—520.
90. *Кичатинов Л. Л.* О магнитной гидродинамике средних полей в неоднородной турбулентной среде.— Магнитная гидродинамика, 1982, № 3.
91. *Вайнштейн С. И., Кичатинов Л. Л.* Сильное рассеяние частиц в случайно неоднородном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1981, 81, с. 1723—1730.
92. *Вайнштейн С. И.* Функциональный подход в теории турбулентного динамо.— ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1376—1385.
93. *Иванов С. Л.* Взаимодействие квазиоднородного магнитного поля с ансамблем МГД-колебаний.— ПМТФ, 1976, № 2, с. 16—22.
94. *Coroniti F. V.* On the magnetic viscosity in keplerian disks.— Astrophys. J., 1981, 244, p. 587—599.
95. *Braginski S. I., Roberts P. H.* Magnetic field generation by baroclinic waves.— Proc. Roy. Soc. London, 1975, A347, p. 125—140.
96. *Gilman P. A., Miller J.* Dynamically consistent nonlinear dynamos.— Astrophys. J. Suppl., 1981, 46, p. 211—238.
97. *Cuong P. G., Busse F. H.* Generation of magnetic fields by convection in a rotating sphere.— Phys. Earth and Planet. Inter., 1981, 24, p. 272—283.
98. *Stix M.* How does the small-scale velocity field affect the dynamo problem? — In: Small-scale motions on the Sun: Prepr. N 179. Freiburg: Kiepenheuer-Inst., 1979, p. 87—94.
99. *Malkus W. V. R., Proctor M. R. E.* The macrodynamics of α -effect.— J. Fluid Mech., 1975, 67, p. 417—443.
100. *Vaughan A. H., Ballinas S. L., Middelkoop F.* et al. Stellar rotation in lower main-sequence stars...— Astrophys. J., 1981, 250, p. 276—283.
101. *Antonucci E.* Solar rotating magnetic dipole?: Prepr. N 570. Stanford: Inst. Plasma Res. Stanford Univ., USA 1974. 26 p.
102. *Коржов Н. П.* Структурные особенности гелиомагнитосферы.— В кн.: Прогнозирование состояния магнитосферы. М.: Наука, 1980, с. 10—11.

103. Эдди Дж. История об исчезнувших солнечных пятнах.— УФН, 1977, 125, с. 315—329.
104. Догель В. А., Сыроватский С. И. Двухуровневая модель солнечного динамо.— В кн.: XI ленинградский семинар по космофизике. Л.: Наука, 1979, с. 15—27.
105. Ruzmaikin A. A. The solar cycle as a strange attractor.— *Comments Astrophys.*, 1981, 9, p. 85—90.
106. Куклин Г. В. Периоды низкой солнечной активности как возможное состояние динамической системы «Солнечный цикл»: Препринт СибИЗМИР № 1—82. Иркутск, 1982. 20 с.
107. Krause F., Roberts P. H. Strange attractor of large-scale non-linear dynamics.— *Adv. Space Sci.*, 1981, 1, p. 231—240.
108. Вайнштейн С. И. Возможное объяснение тонкой структуры магнитных полей на Солнце.— *Астрон. журн.*, 1979, 56, с. 1297—1302.
109. Pouquet A. Small scales high Reynolds number turbulence.— In: *Small-scale motions on the Sun: Prepr. N 179. Freiburg: Kiepenheuer-Inst.*, 1979, p. 63—68.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	6

Глава первая ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИНАМО

1. Специфика космических полей покоящейся среды	11
2. Поля в движущейся среде. Дифференциальное вращение	13
3. Магнитная гидродинамика (МГД)	16
4. Постановка задачи динамо	20
5. Проблема собственных значений. Уменьшение масштаба поля	22
6. Простые модели динамо	26
7. Дифференциально вращающийся цилиндр	28
8. Краткое заключение	40

Глава вторая ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО КРУПНОМАСШТАБНОГО ПОЛЯ. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

1. Турбулентность космической плазмы	41
2. Сведения из теории турбулентности	42
3. Новейшие развития в теории турбулентности	45
4. Лагранжев подход	51
5. Лагранжево описание статистических характеристик	56
6. Лагранжевы статистические характеристики двух жидких частиц	59
7. Уравнение для крупномасштабного магнитного поля	60
8. Точные немарковские модели	67
9. Генерация крупномасштабных магнитных полей в космосе	75
10. Механизм Паркера динамо-эжектора магнитного потока	83
11. Магнитные поля в высокопроводящей плазме	91

Глава третья ДИНАМИКА МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ПОЛЕЙ

1. Общие замечания	97
2. Динамика пульсаций скалярной примеси	101
3. Функция распределения для двух близких точек жидкости	106
4. Свойства функции распределения для неближких жидких частиц	111
5. Уравнение динамики супермелкомасштабных полей	113
6. Общие свойства уравнения для корреляционной функции магнитных полей	116
7. Динамо супермелкомасштабных полей	121

8. Уравнение динамики мелкомасштабных полей	126
9. Динамо мелкомасштабных полей	130
10. Характер усиления мелкомасштабных полей	135
11. Динамика мелкомасштабных пульсаций магнитного поля при наличии маломодовой турбулентности	139
12. Другие виды нетрадиционной турбулентности	147
13. Общие физические соображения, связанные с генерацией мелкомасштабных полей	159

Глава четвертая

МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ БОЛЬШИХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

1. Основные задачи	175
2. Установившиеся спектры турбулентности	177
3. Диффузионное приближение в теории турбулентности	186
4. Мелкомасштабные поля в диффузионном приближении . . .	192
5. Крупномасштабные поля в однородной турбулентной среде	196
6. Главный нелинейный эффект турбулентного динамо	203
7. Динамика крупномасштабных полей в неоднородной тур- булентной среде	212
8. О природе крупномасштабных полей на Солнце	222
ЛИТЕРАТУРА	231

Самуил Иосифович Вайнштейн
МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В КОСМОСЕ

Утверждено к печати
Сибирским институтом земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР

Редактор **В. В. Фомин-Агеев**
Художник **Л. А. Григорян**
Художественный редактор **А. П. Поленова**
Технический редактор **В. В. Тарасова**
Корректоры **Н. Б. Габасова, В. Г. Петрова**

ИБ № 27071

Сдано в набор 28.12.82.
Подписано к печати 25.03.83
Т-02766. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 15. Усл. кр. отт. 15,25
Уч.-изд. л. 16,2. Тираж 1250 экз. Тип. зак. 2386
Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10